

**ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA A PLAZOS DE TASAS DE INTERÉS DE  
COLOMBIA UTILIZANDO EL MODELO DIEBOLD, RUDEBUSCH & ARUOBA  
CON MACROFACTORES**

**JACKELYNE GÓMEZ RESTREPO**

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título Magíster en  
Economía**

**Asesor: DIEGO ALEXANDER RESTREPO TOBÓN**

**MEDELLÍN**

**UNIVERSIDAD EAFIT**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA**

**2016**

**Nota de aceptación**

---

---

**Presidente del jurado**

---

**Jurado**

---

**Jurado**

---

**Medellín 31 de Mayo de 2016**

## **AGRADECIMIENTOS**

A quienes directa o indirectamente contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

## Tabla de Contenidos

INTRODUCCIÓN.....	9
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	12
OBJETIVO .....	14
Objetivos específicos .....	14
ESTADO DEL ARTE .....	15
Modelos de factores de la curva de rendimientos.....	18
Modelos de factores de la curva de rendimientos y variables macroeconómicas.....	20
PRESENTACIÓN DE LA HIPÓTESIS.....	22
METODOLOGÍA Y DATOS .....	23
Modelos de factores .....	23
Modelo de un solo factor.....	23
Modelo multifactor.....	24
Representación estado-espacio.....	25
Estimación del modelo: Filtro de Kalman .....	26
Estimación del modelo de Diebold & Li con factores latentes.....	27
Estimación del modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba con macrofactores.....	29
Cálculo de errores .....	30
Datos .....	31
RESULTADOS .....	34
Modelo de factores latentes .....	34
Estimación.....	34
Análisis Impulso Respuesta .....	40
Descomposición de Varianza .....	41

Modelo con Macrofactores .....	41
Estimación .....	41
Análisis Impulso Respuesta .....	47
Descomposición de Varianza .....	49
Back testing.....	51
CRONOGRAMA .....	53
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	54
BIBLIOGRAFÍA .....	56
ANEXOS .....	60
Tasas estimadas con el modelo de factores latentes .....	60
Tasas estimadas con el modelo de macrofactores.....	61

## Lista de Figuras

Fig. 1 Comportamiento de la curva. Elaboración propia.....	15
Fig. 2 Algoritmo del Filtro de Kalman .....	26
Fig. 3 Cálculo empírico del nivel, pendiente y curvatura.....	31
Fig. 4 Curva en el tiempo .....	32
Fig. 5 Factores estimados .....	35
Fig. 6 Nivel Estimado vs. Nivel Empírico e Inflación (pbs) .....	35
Fig. 7 Pendiente Estimada vs. Pendiente Empírica .....	36
Fig. 8 Curvatura Estimada vs. Curvatura Empírica.....	36
Fig. 9 Comportamiento de los residuales .....	37
Fig. 10 Tasas estimadas vs. Tasas observadas.....	39
Fig. 11 Curva Estimada vs. Curva Observada (NS) en puntos mínimos y máximos de los factores.....	39
Fig. 12 Análisis Impulso Respuesta del modelo de solo factores .....	40
Fig. 13 Factores estimados .....	42
Fig. 14 Nivel estimado vs. Nivel empírico e Inflación.....	43
Fig. 15 Pendiente estimada vs. Pendiente empírica.....	43
Fig. 16 Curvatura estimada vs. Curvatura empírica .....	44
Fig. 17 Residuales del modelo con macrofactores .....	44
Fig. 18 Tasas estimadas vs. Tasas observadas.....	46
Fig. 19 Curva estimada vs. Curva observada (NS) en puntos mínimos y máximos de los factores.....	47
Fig. 20 Análisis Impulso Respuesta del modelo con macrofactores .....	48

## RESUMEN

Se presenta una aproximación a la estructura a plazos de tasas de interés del mercado colombiano a través de dos modelos: Modelo de Diebold, & Li con factores latentes y el modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba con Macrofactores, los cuales fueron estimados utilizando un Filtro de Kalman implementado en MATLAB y posteriormente utilizados para obtener pronósticos de la curva en función del comportamiento esperado de variables macroeconómicas y financieras de la economía local y americana. La inclusión de los macrofactores se hace esperando mejores proyecciones de la curva, de manera que tener proyecciones de estas variables será de utilidad para conocer el comportamiento futuro de la curva de rendimientos local.

Los modelos se ajustan con datos mensuales, tomando el periodo 2003-2015 y testeado con una porción de esta información; el modelo de factores latentes tiene solo información histórica de la curva cero cupón mientras que en el modelo con macrofactores se consideraron variables como: inflación local 12 meses, CDS 5Y, índice VIX, precios del WTI, TRM, tasa de cambio Euro/Dólar, tasa REPO y tasa FED; obteniendo finalmente dos modelos, siendo el que contiene macrofactores el que tiene mejores indicadores de desempeño en el pronóstico.

**Palabras clave:** Modelo Diebold, Rudebusch & Aruoba, macrofactores, estructura a plazos de tasas de interés, pronósticos

## ABSTRACT

Diebold & Li Model and Diebold, Rudebusch & Aruoba were estimated for getting an approximation of Colombia's term structure. Those models were estimated with a Kalman Filter which was implemented in MATLAB, and then they were used to forecast the term structure using projections of macroeconomic and financial variables.

Proposed models were adjusted with monthly data from 2003 to 2015 and they were tested with part of that information; latent factor model includes historical zero coupon curves while macrofactors model includes variables as: local inflation, CDS 5Y, VIX index, WTI

prices, TRM, Euro/dollar exchange rate, REPO rate and FED rate. Finally, two models were estimated but in the back testing procedure macrofactors model had better performance measures.

**Palabras clave:** Diebold, Rudebusch & Aruoba model, macrofactors, term structure, forecasting.



## INTRODUCCIÓN

Los mercados financieros no son más que un reflejo de la oferta y la demanda de agentes sobre los activos; sin embargo, conocer su dinámica y posible evolución se ha convertido en un tema que despierta el interés de muchas áreas, ya que tener información adicional sobre su comportamiento o relación con otras variables puede ser de utilidad a la hora de tomar decisiones de inversión y/o financiamiento.

Bajo la teoría, estos mercados reaccionan a los movimientos y cambios en las variables macroeconómicas de un país; no obstante, existen evidencias de que no solo son impactados por aquellas variables internas, sino también por los cambios en las economías desarrolladas y por si fuera poco, dicha relación puede ser variable en el tiempo e incluso podría dejar de presentarse.

Existen varios estudios alrededor del tema, pues lograr tener una medición certera del efecto de los movimientos en las variables macroeconómicas de las economías (internas y externas) sobre los mercados financieros latinoamericanos (particularmente el colombiano), podría usarse como herramienta para identificar posibles movimientos en los precios de los activos, en sus volatilidades o en los flujos de dinero que se moverán alrededor de dicho evento, lo que se puede derivar en tomar decisiones de mercado contando con un poco más de información.

Autores como (Birz & Lott Jr, 2011), (Dabla-Norris & Srivisal, 2013), (Hwang, 2014), (Ikoku & Okany, 2014), (Moser & Dreher, 2010), (Nguyen & Ngo, 2014) y (Quadrini, 2014), presentan un enfoque interesante al buscar evidencias de movimientos en los activos financieros ante cambios en las variables macroeconómicas; no obstante, otros autores intentan realizar este análisis basado en los comunicados de los bancos centrales, un enfoque un poco más inmediato y quizás con mejores resultados, en artículos como: (Dominguez, 2006), (Fратиanni & Marchionne, 2013), (Glick & Leduc, 2012), (Mirkin, Kuznetsova, & Kuznetsov, 2013), (Rosa, 2011), (Siklos, 1997), (Vithessonthi & Techarongrojwong, 2013) y (Wang & Mayes, 2012).

El Mercado de deuda pública, que corresponde a la porción más grande en las negociaciones diarias, está representado directamente por bonos del gobierno a diferentes plazos de vencimiento (TES), generando así una curva, que contiene información no solo de las negociaciones sino también de las expectativas de inflación local de los agentes, percepción del riesgo país y expectativas de crecimiento económico. De esta manera contar con una representación matemática y posteriormente un pronóstico de esta curva permitirá obtener estimaciones sobre las condiciones futuras de la economía, lo que será de gran utilidad para la toma de decisiones ante unas condiciones de mercado dadas.

Utilizando la información histórica de la curva cero cupón se propone estimar el modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba utilizando un filtro de Kalman implementado en MATLAB, posteriormente a este modelo se le agregarán variables como: inflación local 12 meses, CDS 5Y, índice VIX, precios del WTI, TRM, tasa de cambio Euro/Dólar, tasa REPO y tasa FED para estimar, con la misma metodología, el modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba con macrofactores. La propuesta de ambas estimaciones se realiza con el objetivo de identificar si al incluir macrofactores, los pronósticos de la curva cero cupón del mercado de deuda pública tiene un mejor ajuste, de manera que se evidencie el atributo de no eficiencia de los mercados.

La estimación de ambos modelos proporciona dos aproximaciones a la curva de tasas en la que los pronósticos realizados con el modelo de macrofactores presenta mejores indicadores de desempeño, permitiendo concluir que el mercado local de deuda pública reacciona ante movimientos en variables macroeconómicas y financieras locales y americanas; es decir, que existe información externa a la curva que influye en los movimientos de la misma. De manera que poder contar con pronósticos basados en proyecciones o movimientos esperados de la economía colombiana o americana será de utilidad para identificar posibles movimientos de la curva de rendimientos local, lo que llevará a los agentes a tener mayor información para la toma de decisiones de consumo.

Con el fin de realizar un desarrollo de una manera clara, se construyó el documento con 8 secciones, comenzando con un planteamiento del problema que busca acotar el problema a

resolver además de generalizar los resultados que se esperan; se continúa con los objetivos y el estado del arte buscando recopilar la información más relevante del tema. Posteriormente se realiza de una manera formal el planteamiento de la hipótesis seguida por una sección de metodología y datos que da cuentas sobre la manera en qué será abordada la solución, seguido de una sección en la que se mencionan los resultados obtenidos para finalizar con las conclusiones y recomendaciones además del cronograma de las diferentes etapas y la bibliografía utilizada.

## **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

La curva de rendimientos recoge información valiosa como: guardar implícitamente la tasa repo que descuentan los agentes, ayudar a pronosticar cambios en el crecimiento del país y a su vez servir como benchmark para medir otro tipo de deudas o para atraer inversionistas. Existe una vasta línea de modelos que han buscado representar y pronosticar esta curva, con el objetivo de adelantarse al mercado y así tomar decisiones de cómo actuar ante un panorama económico dado.

Los modelos de estructuras a plazo, han sido usados comúnmente por los equipos de investigación de los grandes bancos extranjeros, quienes buscan estimarla; no obstante, a nivel local se conocen muy pocos estudios que utilicen estos modelos sobre el mercado de renta fija colombiano, y aun cuando se hablan de evidencias de relaciones entre las variables macroeconómicas y los mercados financieros son pocos los modelos en los que se han incluido dichos regresores para sus estimaciones. Debido a lo anterior y adicionando el hecho de que el mercado colombiano depende en gran medida de los eventos macroeconómicos y financieros de las economías desarrolladas, se propone formular y estimar el modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba en el que se involucren variables macroeconómicas locales y de la economía estadounidense con el fin de medir la capacidad de pronóstico de dichas variables sobre la estructura a plazos de tasas de interés del mercado de renta fija colombiano.

Aunque se tiene estudios similares de modelado de estructuras de tasas de interés de otras economías, esta propuesta contiene un amplio aporte pues existen pocos desarrollos que busquen modelar y proyectar la curva local con el modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba con y sin macrofactores; por lo tanto, es una propuesta que presenta una aproximación interesante buscando no solo una representación acertada de la estructura a plazos, sino también evidenciar la estrecha relación de ésta con variables propias de la economía y del mercado, así como variables de la economía más influyente: la americana. Existen diferentes razones por las cuales es interesante no solo entender cómo puede moverse esta curva sino pronosticar sus movimientos: la primera relacionada con las expectativas de los agentes acerca de la economía pues las tasas ubicadas en la parte larga

de la curva se entienden como el valor esperado de las cortas en el futuro mostrando un posible escenario de la economía; autores como (Ang, Piazzesi, & Wei, 2006) han encontrado que los spreads entre las tasas son proxy de la actividad real, lo que también es un reflejo del comportamiento futuro de la economía. Ambos caminos llevarían a la posibilidad de determinar oportunidades de inversión, tomar decisiones de ahorro o consumo e incluso tomar decisiones de política monetaria o emisión de bonos. Por último, en términos de coberturas, conocer este comportamiento podría facilitar las decisiones de aquellos agentes (entre ellos el Gobierno quien es el agente que emite los bonos) que deben tomar diferentes posiciones en varios nodos de la curva y así realizar coberturas que mitiguen el riesgo a los movimientos de la estructura a plazos.

Dentro de los resultados, se espera obtener dos modelos: uno con factores latentes y otro con macrofactores, que logren ajustar los movimientos de la curva de tasas de interés y que permitan hacer un pronóstico acertado, incluyendo el impacto de los movimientos de variables macroeconómicas y financieras de ambos mercados.

## **OBJETIVO**

Estimar la estructura a plazos de las tasas de interés del mercado colombiano utilizando el modelo de Diebold & Li solo con tasas (factores latentes) y el modelo Diebold, Rudebusch & Aruoba con macrofactores (variables macroeconómicas locales y estadounidenses) que tengan un efecto sobre el mercado de renta fija local, buscando explicar relaciones que permitirán realizar un pronóstico confiable sobre los posibles movimientos de esta curva (empinamiento, aplanamiento o estabilidad), hecho que podrá ser utilizado como fuente para la toma de decisiones ante condiciones proyectadas del panorama económico.

### **Objetivos específicos**

- Identificar las relaciones teóricas entre las variables macroeconómicas y la estructura a plazos de las tasas de interés del mercado de renta fija colombiano.
- Comprobar la presencia de relaciones dinámicas que se han presentado entre los anuncios macroeconómicos locales, sobre la estructura a plazos de las tasas de interés del mercado colombiano.
- Comprobar la presencia de relaciones dinámicas que se han presentado entre los anuncios macroeconómicos estadounidenses, sobre la estructura a plazos de las tasas de interés del mercado colombiano.
- Modelar y estimar la curva de rendimientos a través del modelo de Diebold & Li con factores latentes.
- Modelar y estimar la curva de rendimientos a través del modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba con macrofactores locales y estadounidenses.
- Testear y elegir el modelo con mayor capacidad de pronóstico utilizando los criterios de desempeño durante el back testing.
- Validar y verificar los pronósticos.

## ESTADO DEL ARTE

(Arango, González, León, & Melo, 2006) definen la estructura a plazo de la tasa de interés como la relación entre los rendimientos de títulos con una calidad crediticia similar, regularmente son tasas libres de riesgo, pero con diferente período de maduración (tiempo durante el cual el emisor del bono promete realizar los pagos pactados, incluyendo el correspondiente al principal). La representación gráfica de la estructura a plazo de las tasas de interés se conoce como curva de rendimientos (Ver Fig.1); de acuerdo con (Melo, 2010) “es un mecanismo de transmisión importante de la política monetaria a la inflación y al producto del país. En este sentido, la curva de rendimientos es una herramienta útil para el Banco Central y los agentes que participan en el mercado” pues recoge información valiosa para los diferentes involucrados y para la misma economía, guardando implícitamente información acerca de qué tasa repo descuentan los agentes, ayudando a pronosticar cambios en el crecimiento del país y a su vez sirviendo como benchmark para medir otro tipo de deudas o para atraer inversionistas.

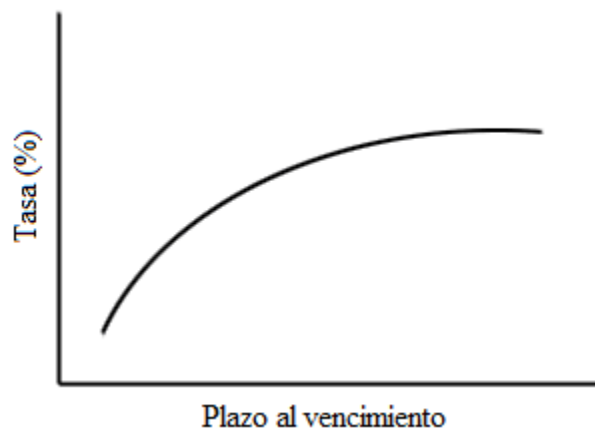


Fig. 1 Comportamiento de la curva. Elaboración propia

Como lo indica la gráfica de la Fig.1, la curva en condiciones normales tiene una pendiente positiva, lo que da cuenta de que las tasas a largo plazo son más altas que las del corto plazo; sin embargo, la curva sufre movimientos como empinamientos (mayor pendiente) o aplanamientos (menor pendiente), evidenciando una expectativa de subida o bajada de tasas por parte del Banco de la República en un futuro. No obstante, la curva puede estar

invertida; es decir, las tasas del corto plazo pueden ser más altas que las del largo plazo, hecho que en la historia ha coincidido con anticipos de periodos de recesión. Es importante mencionar que la curva de la Fig.1 corresponde a una aproximación de la cero cupón, calculada a través de la metodología de Nelson y Siegel (que toma como insumo los yields de los TES a diferentes plazos) y es una representación continua de la unión de estos puntos.

Los diferentes componentes de la estructura a plazos de tasas de interés se han convertido en características importantes a la hora de analizar el futuro de un país, de esta manera varios analistas se centran en analizar la pendiente de esta curva con el fin de identificar movimientos importantes en la inflación, mientras que la curvatura puede dar información sobre del ciclo económico en el que entrará el país. Un estudio realizado por (Arango et al., 2006) evidencia “una relación bidireccional entre los factores de la estructura a término y las variables macroeconómicas consideradas dentro del estudio (tasa interbancaria, inflación, brecha del producto y el índice de mercados emergentes). Sin embargo, la relación de las variables macro sobre la curva de rendimientos es más fuerte que en el sentido contrario.” Con respecto a los componentes de la curva, encuentran que un choque en la pendiente produce una respuesta positiva en la tasa interbancaria (mecanismo a través del cual se controla la inflación), mostrando las relaciones que pueden presentarse entre dichas variables.

(Mejia, 2003) resalta varios puntos interesantes que ayudan a dimensionar la cantidad de información que existe en esta curva, entre ellos: “un aumento en la pendiente de la curva de rendimientos debe señalarle a la autoridad monetaria, ante todo, un riesgo de que las expectativas de inflación están aumentando”, de esta manera pronósticos de una inclinación elevada dará señales de un movimiento en las expectativas de inflación de los agentes. Este autor recalca, como muchos, que la pendiente de esta curva no es más que un reflejo de la trayectoria de las tasas de corto plazo, en muchos casos la pendiente también es relacionada con las expectativas de actividad económica, pues “dado que la tasa de interés nominal tiene un componente real que se encuentra relacionado con la actividad económica y otro



con las expectativas de inflación”, es de esperarse que los movimientos den cuenta de una expansión o decrecimiento futuro.

(Arango & Flórez, 2008) identifica evidencia que sugiere que las tasas de interés tienen una alta capacidad informativa sobre las expectativas de inflación futura en Colombia. Sin embargo, depende altamente del período muestral, de las expectativas sobre la inflación y de los datos utilizados para construir el *spread* o diferencial entre las tasas.

(Fancis Diebold, Piazzesi, & Rudebusch, 2005) comparten dos enfoques interesantes para analizar la mejor manera de modelado de la estructura a plazos de las tasas de cualquier país, desde un punto de vista macroeconómico la tasa de interés a corto plazo se considera el instrumento de política monetaria por excelencia del banco central, el cual controla la velocidad de ajuste a las metas inflacionarias. Ahora, desde la perspectiva financiera, la tasa de corto plazo es una variable vital asociada a los rendimientos de otros instrumentos o plazos. Por lo tanto, modelos que combinen ambos mundos permitirán una mejor comprensión de los movimientos de la curva.

No obstante, uno de los primeros problemas que se presenta a la hora de estimar esta curva, es hallar una manera simple de representar la información de las tasas a diferentes plazos, encontrando como solución resumirlos a través de variables o factores contruidos que almacenen la mayor cantidad de información. En general, los autores se han dedicado a proponer modelos que utilizan como variables un conjunto pequeño de factores que representan combinaciones de los rendimientos, manteniendo el principio de parsimonia y reduciendo la existencia de correlación entre las variables.

En la literatura, existe variedad de métodos para el ajuste de la estructura a plazos de tasas de interés. Uno de los más conocidos es el de la construcción de tres factores con componentes principales que se interpretan como proxies del nivel, la pendiente y la curvatura de dicha curva. Posteriormente, se encuentra el famoso modelo de Nelson – Siegel el cual es un modelo de tres factores que pueden asociarse a las tres componentes de la curva mencionadas en la metodología anterior. Un enfoque adicional es el que dan muchos autores en sus propuestas de modelos factoriales dinámicos que incluyen la

condición de no arbitraje; sumado a esta categoría se han encontrado estudios dedicados a incluir variables macroeconómicas que dan un entendimiento global de las interacciones entre las variables macro y los factores. La gran mayoría de los modelos incorporan la condición de no arbitraje, pues con ésta se asegura que el cambio de los rendimientos en el tiempo sea consistente con la forma de la curva.

En el entorno local, aunque hay pocas publicaciones, existen propuestas interesantes como la de (Vela, 2013), quien implementa una red neuronal artificial para estimar las curvas de rendimientos de diferentes países (Colombia, México, Chile, Perú y EE.UU.); de esta manera, busca hallar los valores de los betas de dos modelos ampliamente conocidos en la literatura (modelo de Nelson y Siegel y el modelo de Svensson); en general, obtiene muy buenas aproximaciones en diferentes ventanas de tiempo. Por su parte, (Velásquez, 2015) estima 5 modelos con información histórica de la curva de rendimientos de Colombia, encontrando los errores más grandes en la parte corta que en la parte larga de la curva.

### **Modelos de factores de la curva de rendimientos**

Estos modelos son conocidos porque utilizan factores latentes asociados directamente a los componentes de la curva; generalmente el nivel, la pendiente y la curvatura de la misma.

El modelo más simple y conocido es el de Nelson y Siegel, pues genera aproximaciones muy acertadas en cuanto a la simulación de la curva, además de representar de manera adecuada sus características: como lo mencionan en (Christensen, Diebold, & Rudebusch, 2009) se pueden encontrar las diferentes formas de la curvatura, es más volátil la parte corta en comparación con el mediano y largo plazo y está acotado con límites superiores e inferiores para las tasas.

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_3 e^{-\lambda\tau} \quad \tau = 1, 2, \dots, N; \lambda > 0 \quad (1)$$

La ecuación (1) corresponde al modelo de Nelson – Siegel, donde  $y(\tau)$  es el rendimiento de los títulos con vencimiento  $\tau$ . Este modelo propone interpretar los parámetros  $\beta_1$  como el factor de largo plazo o nivel,  $\beta_2 - \beta_3$  como el factor de corto plazo o pendiente y  $\beta_3$  como el factor de mediano plazo o curvatura. Siendo el anterior modelo la base para muchos

desarrollos, se han encontrado diferentes estudios que buscan utilizar las características favorables de éste y un mejor ajuste a través de modificaciones, tal y como lo hacen en (Christensen et al., 2009) con el modelo sin arbitraje de Nelson y Siegel el cual es una generalización a través de cinco factores.

$$y(\tau) = L_t + S_t^1 \left( \frac{1-e^{-\lambda_1\tau}}{\lambda_1\tau} \right) + S_t^2 \left( \frac{1-e^{-\lambda_2\tau}}{\lambda_2\tau} \right) + C_t^1 \left( \frac{1-e^{-\lambda_1\tau}}{\lambda_1\tau} - e^{-\lambda_1\tau} \right) + C_t^2 \left( \frac{1-e^{-\lambda_2\tau}}{\lambda_2\tau} - e^{-\lambda_2\tau} \right) \quad (2)$$

Donde

$L_t$  corresponde al nivel

$S_t^1$  y  $S_t^2$  corresponden a dos factores de pendiente

$C_t^1$  y  $C_t^2$  hacen referencia a dos factores asociados a la curvatura

Dentro de sus conclusiones, los autores resaltan de este modelo que además de ser libre de arbitraje, tiene un aumento en la cantidad de factores y un muy buen desempeño en el ajuste de la curva.

Dentro del pool de autores que se ha dedicado a encontrar las mejores aproximaciones para el modelado de la estructura a plazo se encuentre Diebold, quien en compañía de Li y Francis, en su artículo (Francis Diebold & Li, 2005) proponen un ajuste a través de un modelo con variaciones del modelo de Nelson y Siegel para modelar la curva, periodo a periodo, con factores. Básicamente realizan una reinterpretación de la curva de Nelson y Siegel con un modelo dinámico en el tiempo que utiliza tres factores (nivel, pendiente y curvatura) teniendo muy buenos resultados para plazos superiores a un año, y aunque no es libre de arbitraje, resaltan su buen desempeño por su sencillez y parsimonia.

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right) \quad (3)$$

Donde  $\beta_{1t}$ ,  $\beta_{2t}$  y  $\beta_{3t}$  son interpretados como los factores latentes. De manera que  $\beta_{1t}$ , al igual que en el modelo de Nelson y Siegel (ec. 1) corresponde al factor de largo plazo o

nivel,  $\beta_{2t}$  es el factor negativo asociado a la pendiente de la curva o factor de corto plazo y  $\beta_{3t}$  se asocia a la curvatura. Con respecto al modelo de Nelson y Siegel, la interpretación es más sencilla pues los factores tienen una interpretación directa.

En su trabajo, (Duffie & Kan, 1996) proponen un modelo multifactor libre de arbitraje para estimar la estructura a plazos, el cual genera relaciones simples entre las tasas que pueden ser estimadas computacionalmente.

### **Modelos de factores de la curva de rendimientos y variables macroeconómicas**

Los modelos de factores que incorporan variables macroeconómicas lograron un importante puesto dentro de las investigaciones gracias a los buenos resultados y a la posibilidad de incorporar las relaciones ante shocks en las variables macro.

Posteriormente, (Francis Diebold, Rudebusch, & Aruoba, 2006), publican un modelo para el ajuste de la curva a través de factores latentes en el que suponen que la estructura de tasas sigue un proceso VAR que puede ser estimado por métodos convencionales, incluyendo variables macroeconómicas locales (actividad real, inflación y el instrumento de política monetaria). La combinación de regresores es útil a la hora de identificar las relaciones que existen entre la curva y las variables macroeconómicas más relevantes, además de los impactos que tienen los movimientos de éstas sobre la curva. En sus resultados encuentran evidencia de los efectos macroeconómicos sobre la estructura; sin embargo, también hallan una relación importante entre las tasas futuras y el instrumento de política monetaria. No obstante, los autores son conscientes de que en términos financieros no utilizar el supuesto de no arbitraje puede ser muy cuestionado, pero ante esto argumentan que los mismos datos reflejarán la propiedad y la trasladarán al modelo.

(Rudebusch & Wu, 2004) presentan un estudio adicional en el que estiman un modelo macro-financiero que combina la especificación de la curva junto con algunas variables macroeconómicas. Dentro de los resultados encuentran relaciones interesantes entre los factores y las variables macro, entre ellos: el factor del nivel se asocia a la meta de inflación del banco central, mientras que el factor de la pendiente se relaciona con la variación cíclica de la inflación.

Investigaciones adicionales, como en (Ann & Piazzesi, 2003), se dedican a encontrar maneras sencillas de estimar los modelos que combinan los factores latentes con las variables macroeconómicas, encontrando métodos como el VAR para este fin. Usando variables latentes y variables como la inflación y el crecimiento económico, buscan hallar el impacto de dichas variables macro sobre los precios de los bonos y la dinámica que puede adquirir la curva de rendimientos, con y sin la inclusión de la condición de no arbitraje. Una de las grandes conclusiones está en que los factores macro explican una porción significativa de los movimientos en la parte corta y media de la curva.

En (Lemke, 2008), los autores proponen un modelo dinámico para estimar la estructura a plazos, utilizando datos observados en la zona euro, incorporan la variable de política monetaria y una especificación de la dinámica de crecimiento de las tasas de interés; incluyen la condición de no arbitraje y proponen funciones afines para cada uno de los rendimientos de la curva. En la aplicación realizada, encuentran estimaciones adecuadas para el análisis de las políticas económicas pues se facilita el hecho de identificar el impacto de un shock macroeconómico tanto en las variables macro como en las rentabilidades. Tienen como resultados que choques en la inflación, brecha del producto y la tasa de corto plazo afectan de manera significativa las tasas de corto plazo más no necesariamente a las que se encuentran en la parte larga de la curva.

Una aplicación más es la de (Lildholdt, Panigirtzoglou, & Peacock, 2007), quienes calculan varios modelos para la estimación de la estructura a plazos de tasas de interés de Reino Unido, dándole una interpretación macroeconómica a los factores. Dentro de sus resultados asocian el primer factor con la meta de inflación observada, el segundo factor como la inflación anual y el tercer factor lo relacionan con la brecha del producto.

## **PRESENTACIÓN DE LA HIPÓTESIS**

Se plantea que el pronóstico de la curva de rendimientos a plazos del mercado colombiano mejorará con respecto a las aproximaciones con modelos de factores latentes, luego de incluir macrofactores que darán cuentas del estado de la economía y de la relación con economías desarrolladas.

Incorporar variables económicas y de mercado como macrofactores permitirá obtener un mejor ajuste debido a que la curva no solo se mueve dependiendo de su historia sino también por los movimientos de variables externas que generan movimientos en la estructura a plazos. Se espera una mejor aproximación en el ajuste del modelo que incorpora variables del mercado y economía estadounidense debido a que Colombia es una economía dependiente de otras más desarrolladas, principalmente la americana, y reacciona de manera diferente ante choques en las variables internas y externas.

## METODOLOGÍA Y DATOS

### Modelos de factores

Para estimar la estructura a plazos de tasas de interés se propone utilizar un modelo de factores latentes y con macrofactores foráneos y locales, con el objetivo de incluir no solo factores sino también variables macroeconómicas relevantes.

Estos modelos suponen que las tasas de interés, en cualquier momento del tiempo, son una función lineal invariante de un pequeño conjunto de factores. De acuerdo con (Brandt & Chapman), se parte del supuesto de que no existen oportunidades de arbitraje en los mercados financieros, lo que es una gran ventaja frente a otros modelos; no obstante son modelos difíciles de estimar y en muchos casos la interpretación de los factores no es intuitiva, lo que hace que tengan un alto grado de complejidad.

Los modelos de este tipo suponen la presencia de un proceso estocástico para las variables de estado o factores que impulsan la dinámica en la curva. Justo allí es donde se presenta la incertidumbre del modelo. (Bolder, 2001) propone interpretar estos factores como los nodos de la estructura o como variables no observables (ej: tasa de interés instantánea) o como variables macroeconómicas (ej: inflación).

Para pasar a los modelos de factores, es necesario entender el desarrollo con un modelo sencillo para luego generalizarlo:

#### Modelo de un solo factor

Se supone que la tasa de interés sigue un proceso de Markov y que su dinámica la describe la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = f(r, t)dt + \rho(r, t)dW(t) \quad (4)$$

Donde  $W(t)$  es un proceso de Wiener, además se supone que el precio del bono es no solo función del tiempo y de su vencimiento sino también de la tasa de interés:

$$P(t, T) = P(t, r, T) \quad (5)$$

No obstante, se busca hallar una representación para la estructura a plazos que tenga la forma:

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \quad (6)$$

Cuando  $A(t)$  y  $B(t)$  son funciones determinísticas, el modelo se considera un ATSM (Affine Term Structure Model), en general estas funciones pueden reescribirse en términos del parámetro  $\tau = T - t$ , tal que:  $A(\tau) \equiv A(t, T)$  y  $B(\tau) \equiv B(t, T)$ , y se omite el argumento de la tasa:  $r(t) \equiv r$ , de donde se obtiene:

$$P(\tau) = e^{A(\tau) - B(\tau)r} \quad (7)$$

A partir de la ecuación (7) se han obtenido diferentes modelos como el de Vasicek (ecuación 8) y el CIR (ecuación 9). Relaciones que permiten usar la tasa instantánea de corto plazo para caracterizar la curva completa en un momento del tiempo, dado un conjunto de parámetros consistentes con las condiciones económicas.

$$\left. \begin{aligned} A(\tau) &= \frac{\gamma(B(\tau) - \tau)}{k^2} - \frac{\sigma^2 B^2(\tau)}{4k} \\ B(\tau) &= \frac{1}{k} (1 - e^{-k\tau}) \\ \gamma &= k^2 \left( \theta - \frac{\sigma\lambda}{k} \right) - \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} A(\tau) &= \ln \left( \frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+k+\lambda)\tau}{2}}}{(\gamma+k+\lambda)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma} \right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \\ B(\tau) &= \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+k+\lambda)(e^{\gamma\tau}-1)+2\gamma} \\ \gamma &= \sqrt{(k+\lambda)^2 + 2\sigma^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

### Modelo multifactor

La forma es muy similar a la de los modelos de un solo factor, aunque la matriz de covarianzas entre las tasas debe ser tomada en cuenta. Se asume que la tasa de interés de corto plazo es una combinación lineal de  $n$  variables de estado:  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Teniendo:

$$r = \sum_{i=1}^n y_i \quad (10)$$



El precio del bono estará entonces en función también de estos factores:

$$P(t, T) = P(t, T, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (11)$$

En general, este precio puede reescribirse como:

$$P(\tau, y_1, y_2, \dots, y_n) = e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^n B_i(\tau) y_i} \quad (12)$$

### **Representación estado-espacio**

La representación estado-espacio es una formulación lineal de un modelo que refleja el comportamiento de un sistema dinámico. Se considera una representación sencilla con el fin de facilitar el manejo del sistema.

Cuando se habla del vector de estados se hace referencia al conjunto de los componentes variables en el tiempo que no se pueden observar directamente; por lo tanto, conocerlo permitirá hallar un estado futuro del sistema.

La representación estado-espacio viene dada por una ecuación de medida y una ecuación de transición, con las que se pretende estimar los valores de  $z_t$  buscando que esta variable recoja la mayor cantidad de información en el periodo  $t$ .

$$z_{t+1} = Az_t + Ke_t \quad (13)$$

$$y_t = Cz_t + e_t \quad (14)$$

Donde  $z_t$  corresponde al vector de estados,  $A, C$  y  $K$  son matrices de parámetros,  $e_t$  es un ruido blanco y  $y_t$  corresponde al vector de observaciones

Como lo mencionan (Izquierdo, Cesáreo, & Pajares, 2004) esta representación permite hallar estimaciones de modelos con componentes dinámicos que no logran observarse, sea que simplemente se proponga una representación más simple de la variable o que se busque estimar factores dinámicos inmersos en su comportamiento.

## Estimación del modelo: Filtro de Kalman

El uso del filtro de Kalman (FK) permite modelar la relación entre la estructura a plazos y los factores, facilitando la estimación de variables no observadas, como es el caso.

La teoría de la estimación puede considerarse como un fundamento matemático natural para la asimilación de los datos ya que, sin perder formalidad, suministra un lenguaje fácil de entender y un número extenso de algoritmos para generar estimaciones; dentro de esta teoría, el Filtro de Kalman es considerado como uno de los algoritmos de mayor importancia en las estimaciones, ya que éste obtiene una estimación óptima de los parámetros.

El FK es considerado una herramienta que estima los estados de un sistema lineal (Simon, 2001) (utilizando la representación estado-espacio) sujeto a una perturbación aleatoria durante su evolución y siguiendo una ecuación de movimiento (Fujii). De acuerdo con (Harvey, 1989) el filtro de Kalman es un procedimiento recursivo para computar el estimador óptimo del vector de estado y de los parámetros, basado en la información disponible en el periodo  $t$ .

El FK es óptimo en el sentido en que incorpora toda la información disponible (Maybeck, 1979); éste procesa todas las mediciones sin tener en cuenta su precisión para estimar el valor actual de las variables, a través del conocimiento del sistema y la medición dinámica, los ruidos del sistema, los errores de medición y la información disponible en las condiciones iniciales; además minimiza el error en las estimaciones (Kleeman).

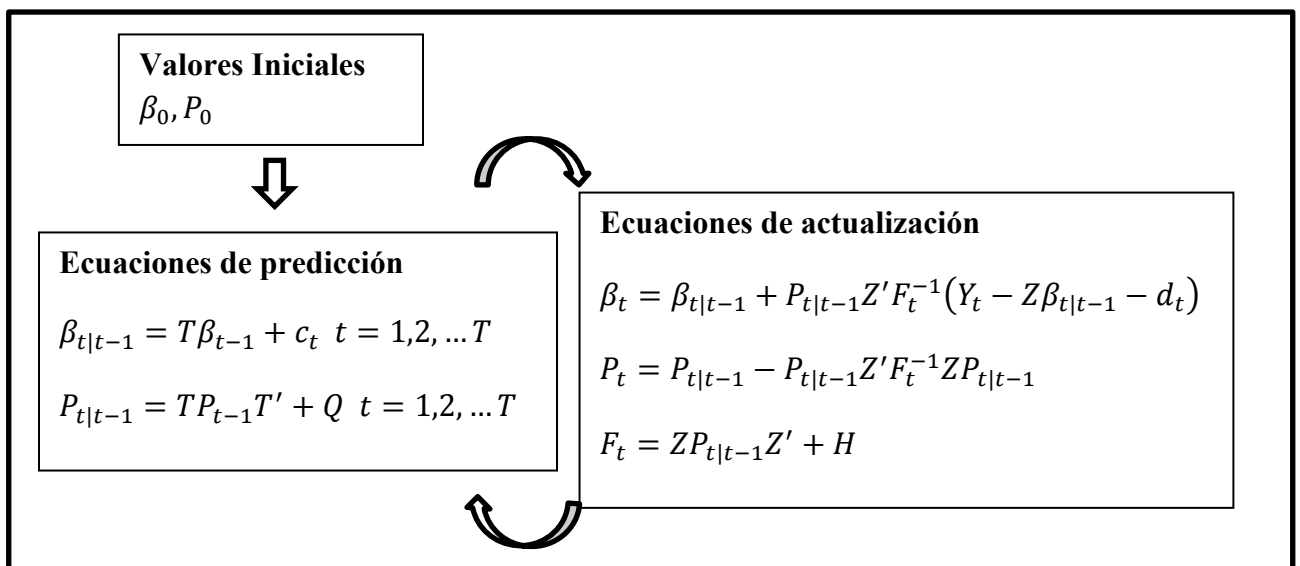


Fig. 2 Algoritmo del Filtro de Kalman

La Fig. 2 presenta el algoritmo del FK, donde  $\beta_0$  y  $P_0$  son los valores iniciales para el vector de estado o parámetros a estimar y la matriz de covarianzas para el error, respectivamente.

La información utilizada en un filtro corresponde al conocimiento del sistema y de la dinámica de los dispositivos de medición, la descripción estadística de los ruidos del sistema, errores de medición e incertidumbres de los modelos dinámicos y cualquier otra información existente en las condiciones iniciales (Vélez, 2009).

### **Estimación del modelo de Diebold & Li con factores latentes**

Una vez se tiene la información y la metodología de estimación, se realiza una separación de muestra (entrenamiento y validación) para construir el modelo y posteriormente testarlo. Para este caso, se utilizará el 75% de la muestra para ajustar el modelo de Diebold & Li con factores latentes (solo tasas).

Tomando como punto de partida el modelo de Nelson y Siegel, Diebold y Li proponen modelar los factores de manera dinámica en su artículo (Francis Diebold & Li, 2005), conservando los hechos estilizados que caracteriza la estructura a plazos de tasas de interés en general:

- La curva es creciente y cóncava.
- La curva puede sufrir movimientos de cambio de nivel, pendiente y curvatura
- La dinámica de las tasas se mantiene al igual que la dinámica en los spreads entre las tasas
- La parte corta de la curva es más volátil de la parte larga
- Las tasas de largo plazo son más estables que las de corto plazo.

De esta manera, este modelo tomó la representación en (1) y lo transformó con factores dinámicos, teniendo:

$$y(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_{3,t} e^{-\lambda\tau} \quad \tau = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, T \quad (15)$$

Tomando dichos factores como el nivel, la pendiente y la curvatura, se tiene el modelo a continuación:

$$y(\tau) = L_t + S_t \left( \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + C_t e^{-\lambda\tau} \quad \tau = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, T \quad (16)$$

Modelo que al ser llevado a la forma estado espacio, queda representado en la ecuación (17):

$$\begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ y_t(\tau_3) \\ \vdots \\ y_t(\tau_{14}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda\tau_1} - e^{-\lambda\tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda\tau_2} - e^{-\lambda\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda\tau_{14}}}{\lambda\tau_{14}} & \frac{1-e^{-\lambda\tau_{14}}}{\lambda\tau_{14}} - e^{-\lambda\tau_{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_{14}) \end{pmatrix}, t = 1, 2, 3 \dots T \quad (17)$$

La ecuación (17) es una representación que corresponde a la ecuación de medida del sistema; sin embargo, depende de las variables no observables ( $L_t, S_t$  y  $C_t$ ) las cuales son halladas a través de la ecuación de transición, que se encarga de reflejar la dinámica del sistema (ec. 18).

$$\begin{pmatrix} L_t - \mu_L \\ S_t - \mu_S \\ C_t - \mu_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{t-1} - \mu_L \\ S_{t-1} - \mu_S \\ C_{t-1} - \mu_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_t(L) \\ \eta_t(S) \\ \eta_t(C) \end{pmatrix} \quad (18)$$

En las ecuaciones (17) y (18), se debe cumplir que:

$$\begin{pmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim WN \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \right] \quad (19)$$

Donde  $H$  es una matriz diagonal y  $Q$  es una matriz no diagonal. Las características de  $H$  indica que los errores en las estimaciones de las tasas son no correlacionados; sin embargo, la forma de la matriz  $Q$  permite que los choques de los factores estén correlacionados.

De una manera más general, el modelo de Diebold & Li puede ser reescrito de manera vectorial conservando su representación estado-espacio:

$$(f_t - \mu) = A(f_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad (20)$$

$$y_t = \Lambda f_t + \varepsilon_t \quad (21)$$

Donde:

$f_t$  corresponde a los factores, es un vector de tamaño 3x1

$\mu$  es la media de los factores, es un vector de tamaño 3x1

$A$  es una matriz de coeficientes de tamaño 3x3

$\eta_t$  es un vector de ruidos de tamaño 3x1, definido en la ec. (20)

$y_t$  es el vector de yields de tamaño 14x1

$\Lambda$  es una matriz de coeficientes de tamaño 14x3

$\varepsilon_t$  es un vector de ruidos de tamaño 14x1, definido en la ec. (20).

### **Estimación del modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba con macrofactores**

El segundo modelo fue estimado con la misma muestra del modelo anterior y utilizando no solo los factores sino también variables macroeconómicas y del mercado, tales como: CDS 5Y Colombia, tasa de cambio dólar euro, tasa de la FED, inflación Variación anual Colombia, precios del crudo, tasa Repo, TRM e Índice VIX. La forma matemática del modelo toma como base el modelo de las ec. (20) y (21), con algunas modificaciones:

$$(f_t - \mu) = A(f_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad (22)$$

$$y_t = \Lambda f_t + \varepsilon_t \quad (23)$$

Donde

$f_t$  corresponde a los factores y macrofactores, es un vector de tamaño 11x1

$\mu$  es la media de los factores, es un vector de tamaño 11x1

$A$  es una matriz de coeficientes de tamaño 11x11

$\eta_t$  es un vector de ruidos de tamaño 11x1, definido en la ec. (20)

$y_t$  es el vector de yields de tamaño 14x1

$\Lambda$  es una matriz de coeficientes de tamaño 14x11

$\varepsilon_t$  es un vector de ruidos de tamaño 14x1, definido en la ec. (21)

Dado que la matriz  $\Lambda$  es la representación matricial del modelo en (17), ésta no debe sufrir modificaciones en su forma, por esta razón las componentes adicionales asociadas a los macrofactores toman el valor de 0. Según (Fancis Diebold et al., 2005) esta forma guardará

consistencia con el hecho de que solo se necesitan tres factores para extraer la información en la curva.

### **Cálculo de errores**

Para medir el ajuste del modelo utilizando la muestra *in sample* o muestra de entrenamiento, se utilizaron dos medidas, el error absoluto medio (EAM o MAE por sus siglas en inglés) y la raíz del error cuadrático medio (RMSE por sus siglas en inglés):

$$EAM = \sum_{t=1}^T |y_{i,t} - \hat{y}_{i,t}|, i = 1, 2, \dots, 14 \quad (24)$$

El error absoluto medio (EAM) permite identificar cuánto se está equivocando el modelo en las estimaciones de la curva en un momento dado. La raíz del error cuadrático medio (RSME) da esta misma medida con una aproximación diferente. Ambos errores permite definir el error en puntos básicos por nodo.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=1}^T (y_{i,t} - \hat{y}_{i,t})^2}, i = 1, 2, \dots, 14 \quad (25)$$

Donde:

$y_{i,t}$  corresponde al yield en el nodo  $i$  en el momento  $t$

$\hat{y}_{i,t}$  corresponde al yield estimado con el FK en el nodo  $i$  en el momento  $t$ .

### **Back Testing**

Para medir el ajuste del modelo utilizando la muestra *out of sample* o muestra de validación, se utilizaron tres medidas, el error absoluto medio, la raíz del error cuadrático medio (previamente explicados) y el CSPE.

$$CSPE = \sum_{t=1}^T \left[ (y_{i,t} - y_{i,t}^{RW})^2 - (y_{i,t} - \hat{y}_{i,t})^2 \right] \quad (26)$$

Donde

$y_{i,t}$  corresponde al yield en el nodo  $i$  en el momento  $t$

$\hat{y}_{i,t}$  corresponde al yield estimado con el FK en el nodo  $i$  en el momento  $t$

$y_{i,t}^{RW}$  corresponde al yield estimado con una caminata aleatoria en el nodo  $i$  en el momento  $t$ .

El CSPE permite medir las estimaciones del modelo contra las estimaciones realizadas con una medida benchmark (construida con una caminata aleatoria). De esta manera es posible encontrar cual modelo se desvía más de las tasas reales.

## Datos

Se toma información histórica de los nodos más representativos y líquidos de la estructura a plazos del mercado colombiano para construir una primera aproximación con factores latentes. Se cuenta con información desde 2003 al 2015 de los rendimientos diarios cero cupón y otras variables macroeconómicas con periodicidad mensual.

Posteriormente, se propone incorporar variables de mercado y macroeconómicas locales y de Estados Unidos, buscando regresores que contengan información relevante, tales como: inflación local 12 meses, CDS 5Y, índice VIX, precios del WTI, TRM, tasa de cambio Euro/Dólar, tasa REPO y tasa FED.

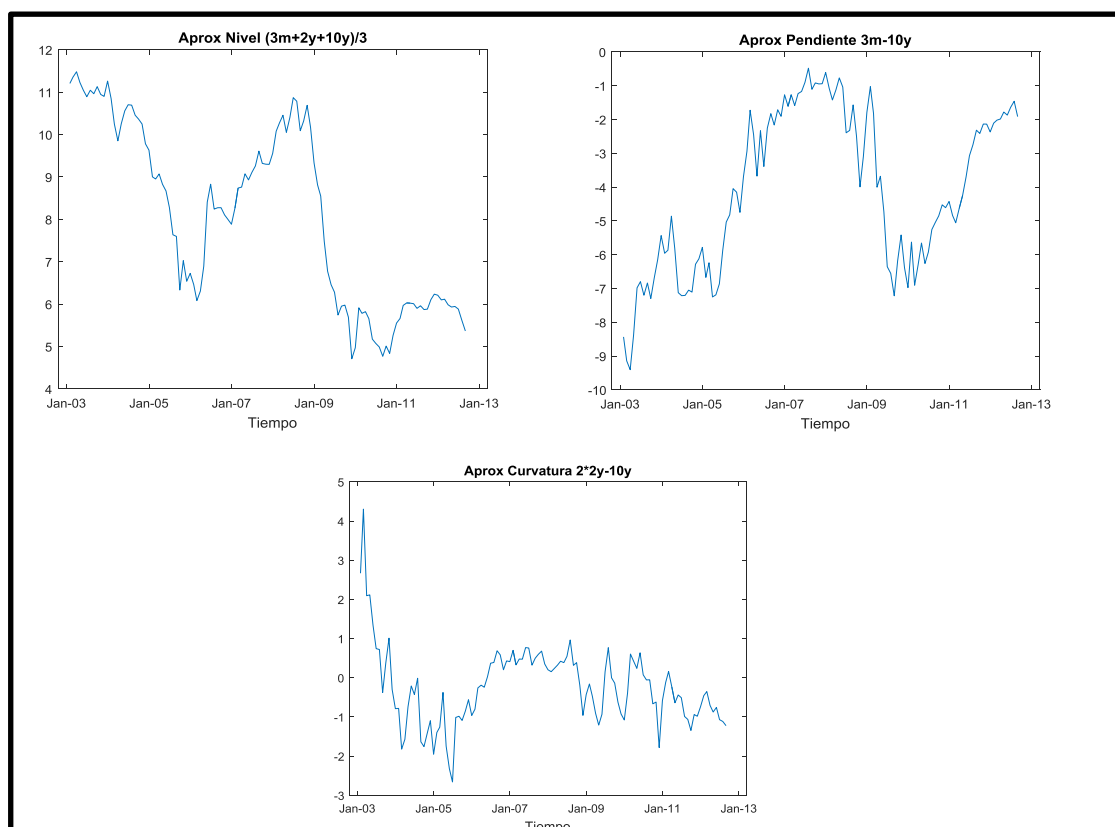


Fig. 3 Cálculo empírico del nivel, pendiente y curvatura

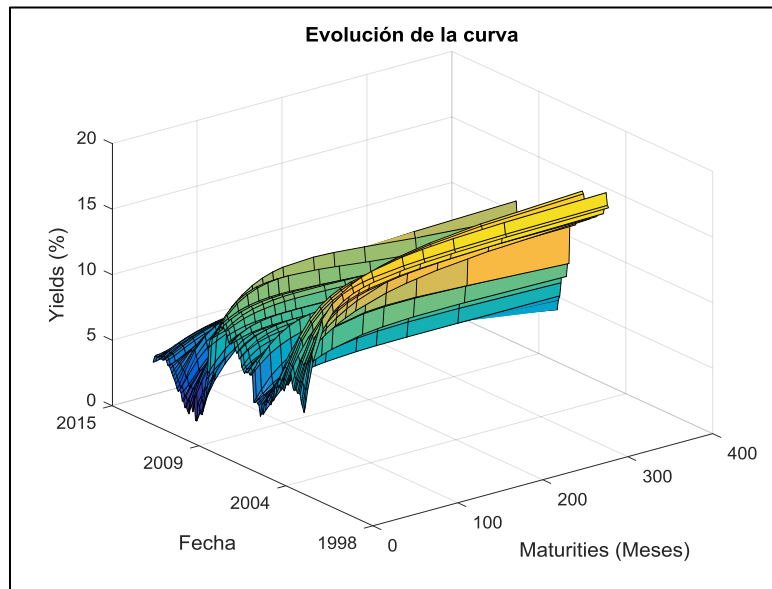
La información para construir la curva cero cupón fue tomada de INFOVALMER, proveedor de precios que suministra los betas del modelo Nelson y Siegel para construir la estructura a plazos. La información de los macrofactores fue tomada de Bloomberg y estos datos no sufrieron ninguna transformación.

Empíricamente, existe una forma de aproximarse a los factores utilizando la evolución de las tasas, las gráficas de la Fig. 3 muestran el comportamiento de estos factores empíricos. En general, se tiene que son dinámicos; sin embargo, el nivel se mantiene en el eje positivo, la pendiente en el eje negativo y el factor restante oscila en ambos sentidos.

$$Nivel_t = \frac{r_{3m,t} + r_{2y,t} + r_{10y,t}}{3} \quad (27)$$

$$Pendiente_t = r_{3m,t} - r_{10y,t} \quad (28)$$

$$Curvatura_t = 2r_{2y,t} - r_{10y,t} \quad (29)$$



**Fig. 4 Curva en el tiempo**

La gráfica de la Fig. 4 presenta la evolución de la curva durante el tiempo, evidenciando las diferentes formas que ésta ha tomado ante cambios del nivel, la pendiente o la curvatura debida a choques en la situación económica y de mercado del momento. Si se analiza, solo



con el eje de vencimiento y tasas se tiene una curva similar a la de la Fig. 1 donde se evidencia la pendiente positiva en la mayor parte de los casos. Ahora, revisando los ejes del tiempo y las tasas, se obtendría el comportamiento de cada nodo en el tiempo, lo que indica cómo se movieron las tasas.

Tabla 1. Estadística descriptiva

<b>Plazo (Meses)</b>	<b>Media (%)</b>	<b>Desviación (%)</b>	<b>Mínimo (%)</b>	<b>Máximo (%)</b>	<b>Percentil 25 (%)</b>	<b>Percentil 50 (%)</b>	<b>Percentil 75 (%)</b>
3	6.060	2.209	1.661	9.839	4.682	6.054	7.649
6	6.412	2.181	1.133	9.974	4.804	6.825	8.188
12	7.028	2.178	2.974	10.346	5.391	7.397	9.134
24	7.993	2.229	4.399	12.790	5.938	8.307	9.813
36	8.631	2.279	5.208	13.774	6.522	8.774	10.408
48	9.099	2.321	5.464	14.296	7.039	8.921	10.824
60	9.436	2.358	5.701	14.788	7.422	9.179	11.031
72	9.681	2.391	5.914	15.136	7.742	9.308	11.456
84	9.860	2.421	6.102	15.385	7.953	9.365	11.813
120	10.159	2.504	6.527	15.835	8.226	9.432	12.384
144	10.249	2.555	6.724	16.009	8.305	9.392	12.586
180	10.309	2.625	6.935	16.184	8.311	9.326	12.861
240	10.325	2.727	7.057	16.359	8.268	9.288	13.064
360	10.291	2.880	5.885	16.534	8.077	9.236	12.186

Estadística descriptiva de la curva de rendimientos de TES

Por su parte la Tabla 1 presenta algunas medidas de estadística descriptiva que indica que, en general, la curva tiene una pendiente positiva (tasas crecientes a medida que aumenta el plazo). También es posible concluir que la desviación es muy similar entre los diferentes nodos; es decir, la dispersión de los datos tiende a parecerse.

## RESULTADOS

### Modelo de factores latentes

La estimación se realiza utilizando solo la información de la curva de tasas, lo que implica que solo se hallan los parámetros asociados a los factores de la curva (nivel, pendiente y curvatura).

### Estimación

A continuación se presentan los coeficientes estimados para el modelo, correspondientes a la matriz  $A$  de la ec. (18) la diagonal de esta matriz muestra la gran relación existente entre los factores y sus rezagos correspondientes (componente dinámico); no obstante, parece que la relación cruzada entre pares de factores no parece tener gran impacto.

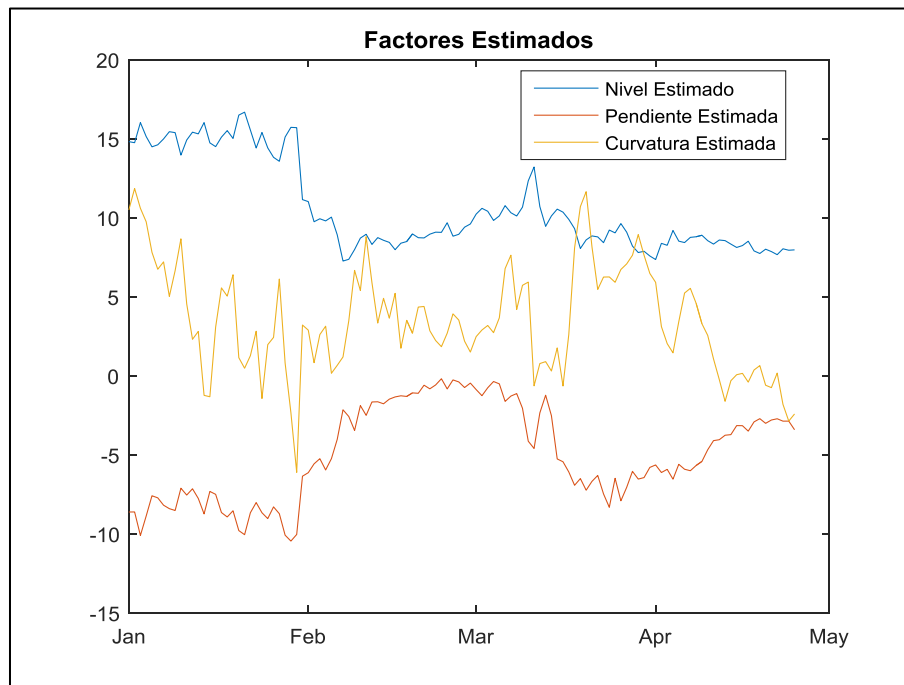
$$A = \begin{pmatrix} 0.997 & 0.067 & 0.087 \\ -0.034 & 0.918 & -0.050 \\ 0.047 & 0.001 & 0.802 \end{pmatrix}$$

La estimación del vector de medias de los factores, muestra una media promedio para el nivel de 10.284%, -4.21% para la pendiente (el signo indica que las tasas son mayores a mayor plazo de vencimiento) y 3.778% para la curvatura. Por su parte el parámetro  $\lambda$  indica que la máxima curvatura, en general, se obtiene en tasas con vencimiento a los 4.5 años.

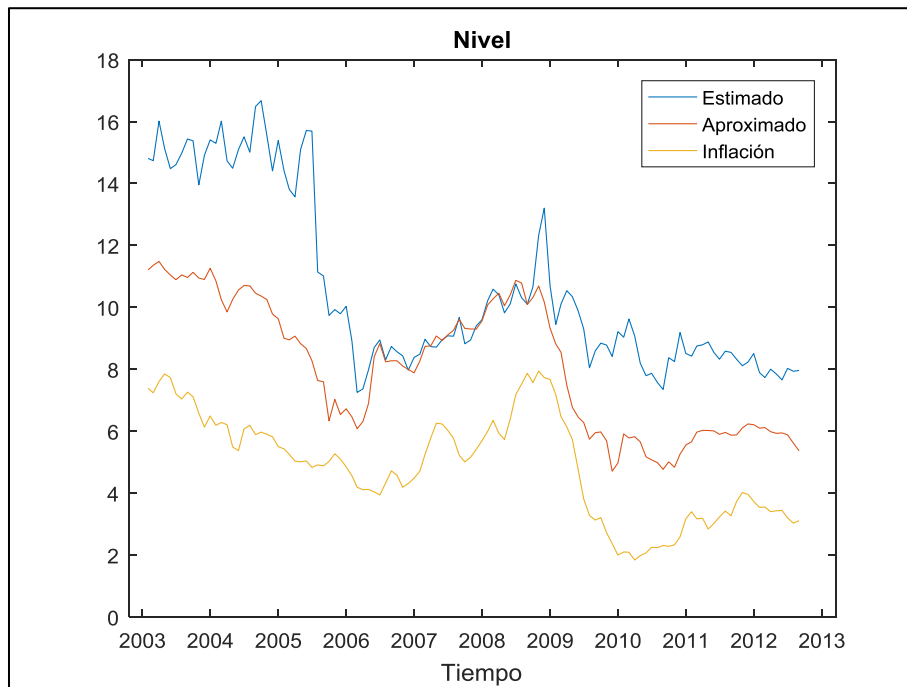
$$\mu = \begin{pmatrix} 10.284 \\ -4.210 \\ 3.778 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0.0312$$

La gráfica de la Fig.5 presenta la dinámica estimada de los factores a través del modelo de Diebold & Li estimado con el Filtro de Kalman; esta gráfica muestra que dichos factores tienen cambios significativos en el tiempo, dejando como evidencia la necesidad de una modelación dinámica de los mismos.

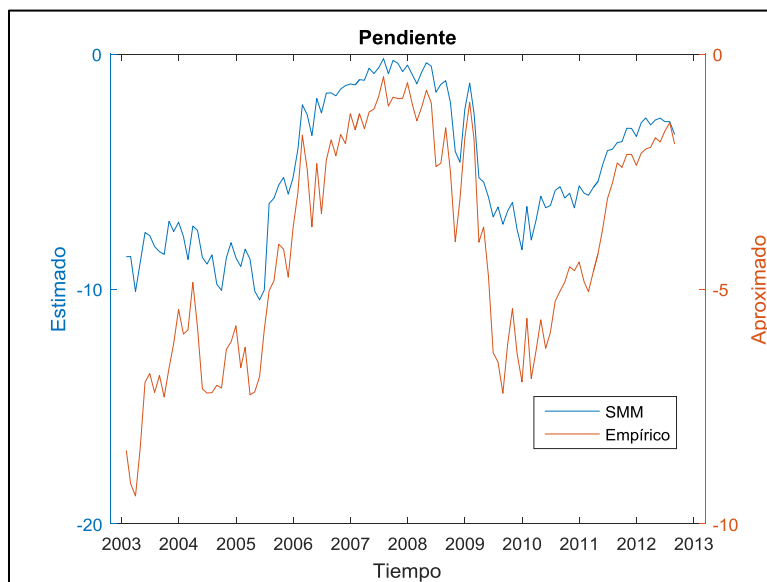


**Fig. 5 Factores estimados**

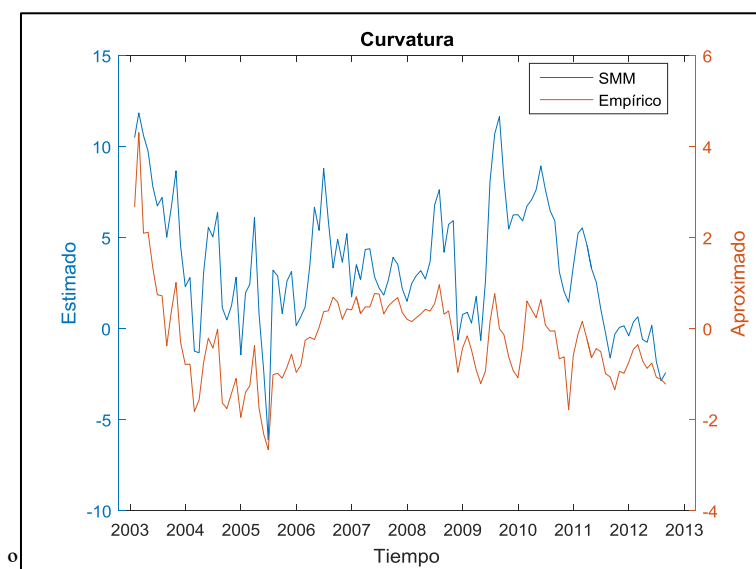


**Fig. 6 Nivel Estimado vs. Nivel Empírico e Inflación (pbs)**

A continuación, se presenta la comparación de cada uno de los factores estimados con el FK y con la aproximación empírica.



**Fig. 7 Pendiente Estimada vs. Pendiente Empírica**

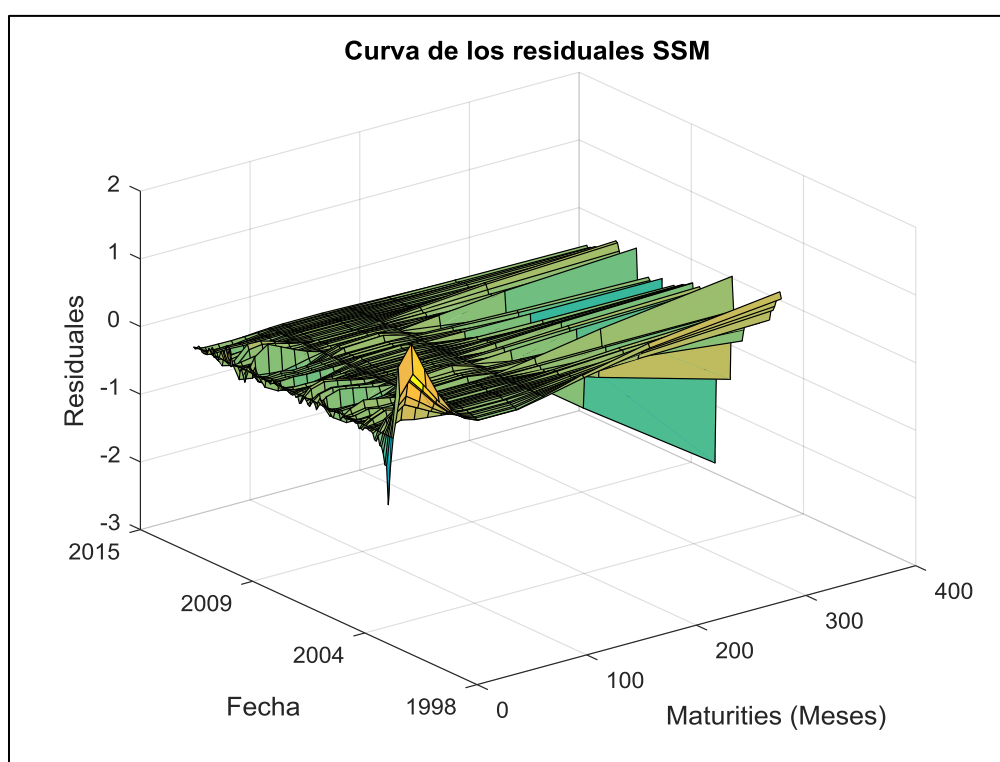


**Fig. 8 Curvatura Estimada vs. Curvatura Empírica**

Las tres gráficas (Fig.6, Fig.7 y Fig.8) evidencian que, en general, el comportamiento de los factores empíricos es replicado por las estimaciones aunque los niveles varían. Con

respecto a la Fig. 6 es interesante identificar que el nivel va en la misma tendencia en que lo hace la inflación, validando una de las comparaciones mencionadas en la teoría.

Los residuales del modelo deben ser ruido blanco; es decir con media tendiente a 0 y no autocorrelacionados. La gráfica en 3D (Fig. 9) muestra el comportamiento de los mismos sugiriendo un comportamiento aleatorio, que se corrobora con la prueba de Dickey Fuller aumentada la cual valida que estos son estacionarios y por lo tanto bien comportados.



**Fig. 9 Comportamiento de los residuales**

La Tabla 2 presenta la media y desviación de los errores expresados en puntos básicos para los diferentes plazos. En general, los errores en el corto plazo son aceptables; no obstante los tres últimos vencimientos tienen errores demasiado grandes. En cuanto a la medición del ajuste, el RMSE indica que el máximo error de ajuste se presenta en el nodo de más largo plazo, con una magnitud de 5 pbs; al igual que el EAM, en cuyo caso el error es de 29.93 pbs.

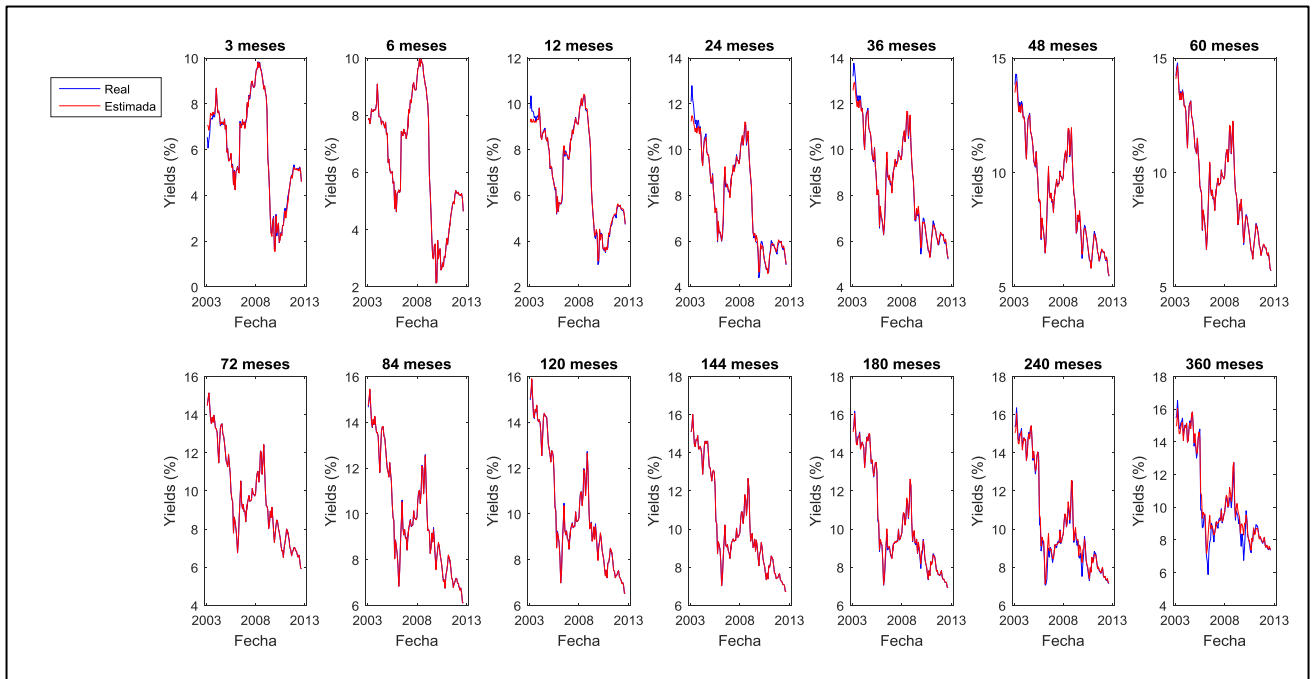
Tabla 2. Resumen estadístico de los errores

<b>Plazo (meses)</b>	<b>Errores</b>		<b>EAM pbs</b>	<b>RMSE pbs</b>
	<b>Media</b>	<b>Desv. Estándar</b>		
3	-0.07	13.84	7.02	1.38
6	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.19	15.15	8.12	1.51
24	2.20	21.96	12.39	2.20
36	-0.41	16.83	10.53	1.68
48	-0.58	10.17	6.69	1.01
60	-0.39	4.31	2.93	0.43
72	0.00	0.00	0.00	0.00
84	0.43	2.72	1.91	0.27
120	0.81	3.45	2.44	0.35
144	0.00	0.00	0.00	0.00
180	-2.47	7.89	5.42	0.82
240	-7.98	22.79	15.14	2.40
360	-17.76	47.16	29.93	5.02

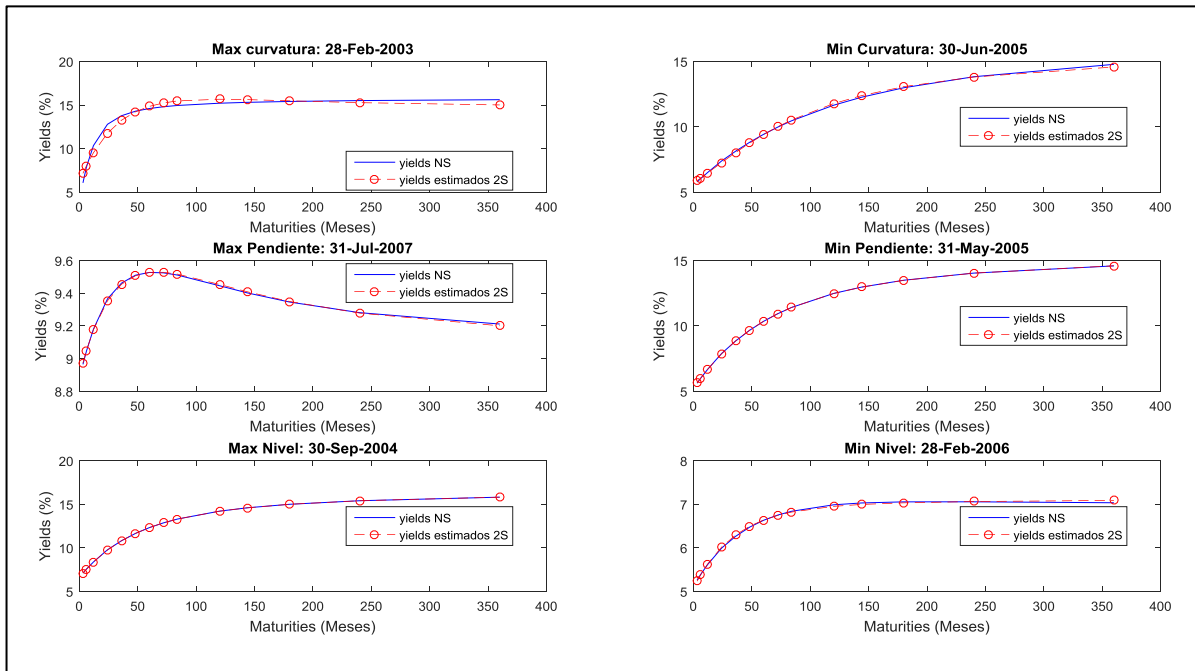
Errores obtenidos en la estimación de la curva utilizando el modelo de solo yields, medidos en puntos básicos (pbs). EAM: Error absoluto medio. RMSE: raíz cuadrada del error cuadrático medio

En general, los errores obtenidos son bajos; sin embargo la desviación estándar en varios de los nodos es grande si se tuviera que tomar alguna decisión de inversión utilizando esta información.

Con el objetivo de identificar las diferencias entre las tasas reales y las estimadas, se grafican ambas series, en donde se evidencia que dicha estimación tiene un buen ajuste (Ver Fig. 10). Como es de esperarse, la diferencia más notoria se encuentra en la última gráfica de la parte inferior a la derecha (correspondiente al nodo de más largo plazo); sin embargo, en la mayoría de gráficas se nota una superposición casi perfecta de las estimaciones sobre las observaciones.



**Fig. 10 Tasas estimadas vs. Tasas observadas**



**Fig. 11 Curva Estimada vs. Curva Observada (NS) en puntos mínimos y máximos de los factores**

Finalmente, se tomaron los niveles máximos y mínimos de cada factor con el fin de identificar cómo habría sido el ajuste en los movimientos extremos. Los resultados (Fig.

11) muestran que el modelo es muy aproximado, especialmente en el corto y mediano plazo. La curva estimada para el 31 de Julio de 2007, se identifica, que aun cuando se tiene un comportamiento atípico (parte larga invertida), el modelo es capaz de replicar dicho comportamiento.

### Análisis Impulso Respuesta

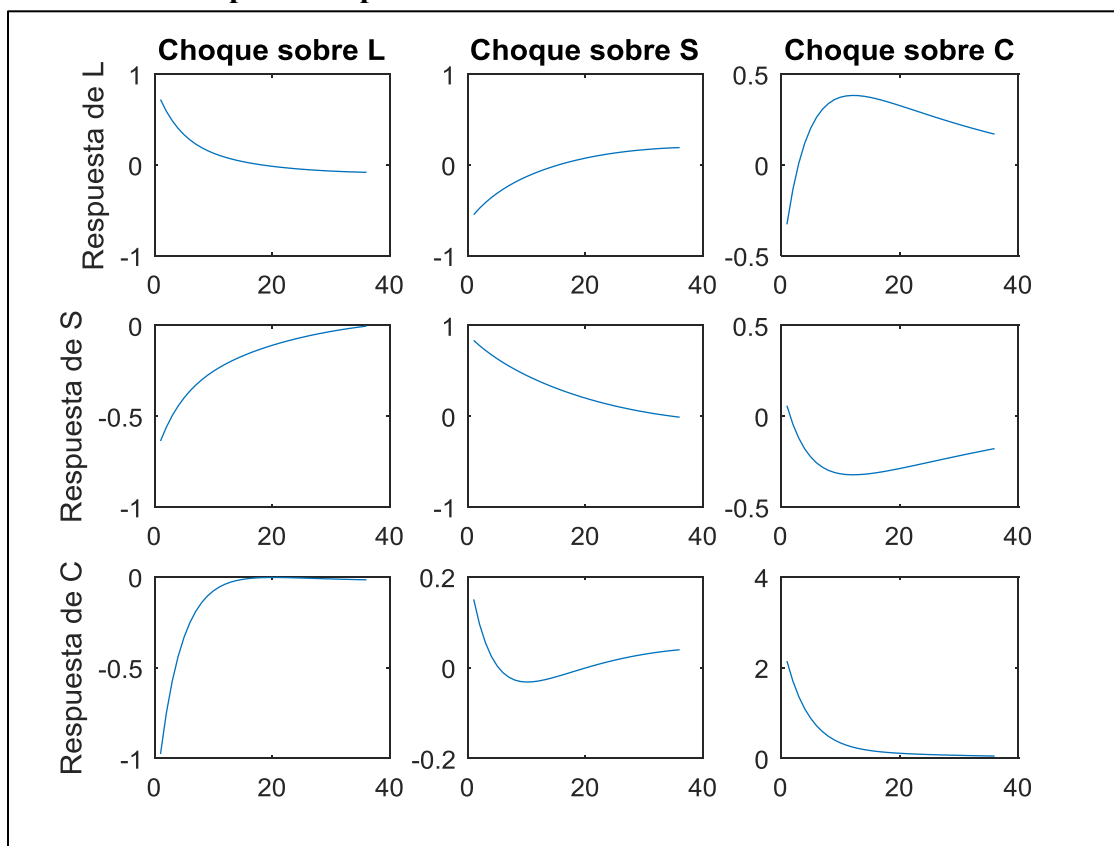


Fig. 12 Análisis Impulso Respuesta del modelo de solo factores

De acuerdo con el análisis impulso respuesta, aumentos del nivel generan subidas en el corto plazo de esta variable y en una menor proporción, respuestas positivas de la pendiente y curvatura. Por su parte, choques positivos sobre la pendiente generan aumento en el nivel de la curva pero disminución en la pendiente de los periodos siguientes (esto puede ser una evidencia de que la curva aunque tiene una pendiente positiva, no se mantiene con pendientes muy pronunciadas) y una caída significativa de la curvatura. Finalmente, un choque positivo sobre el factor de la curvatura muestra incrementos del nivel, pero reacciones negativas en los demás factores (ver Fig. 12).



### Descomposición de Varianza

La descomposición de varianza, se realiza con el objetivo de identificar las variables que tienen mayor incidencia sobre el comportamiento de las tasas y de esta manera determinar las interacciones entre los factores y la curva. La Tabla 3. proporciona la información de la descomposición de varianza para las tasas a 3, 12, 60 y 120 meses en horizontes de pronóstico de 1, 12 y 60 periodos. Para la tasa de 3 meses, el factor que tiene mayor incidencia sobre la variación de esta tasa es el correspondiente a la medida de curvatura, aunque en el tiempo esta proporción disminuye, trasladándose al factor de la curvatura; para el caso de la tasa de 12 meses se tiene que la variación depende en gran medida de la pendiente (en los 3 horizontes de tiempo), seguido por la curvatura.

Es interesante notar que la curvatura es el factor que afecta en mayor proporción a la variación de la tasa de 60 meses (tasa cercana al punto donde se encuentra el pico de la curva, generalmente) y para el caso de la tasa de 120 meses aunque la curvatura es el factor que tiene mayor proporción, le es seguido por el nivel de la curva.

Tabla 3. Descomposición de varianza del modelo de factores latentes

Horizonte (meses)	Tasa de 3 meses			Tasa de 12 meses			Tasa de 60 meses			Tasa de 120 meses		
	1	12	60	1	12	60	1	12	60	1	12	60
L	2.1%	4.0%	9.6%	1.3%	2.8%	8.2%	7.8%	1.9%	4.4%	18.7%	10.1%	6.7%
S	95.5%	75.4%	72.5%	60.5%	45.6%	54.0%	0.3%	1.5%	21.0%	1.6%	0.9%	17.1%
C	2.4%	20.6%	17.9%	38.2%	51.6%	37.8%	91.8%	96.6%	74.7%	79.7%	89.1%	76.2%

Descomposición de la varianza para cada una de las variables (L: Nivel, S: Pendiente y C: Curvatura)

### Modelo con Macrofactores

#### Estimación

Los coeficientes estimados para el modelo, correspondientes a la matriz  $A$  de la ec. (18) muestran la gran relación existente entre los factores y sus rezagos correspondientes (componente dinámico), aunque disminuye un poco para el término de la curvatura en comparación con el parámetro estimado en el modelo de factores latentes.

La estimación del vector de medias de los factores, evidencia una media promedio para el nivel de 10.395%, -4.720% para la pendiente (el signo indica que las tasas son mayores a mayor plazo de vencimiento) y 4.182% para la curvatura (un poco mayor al estimado en el modelo anterior). Por su parte el parámetro  $\lambda$  indica que la máxima curvatura, en general, se obtiene en tasas con vencimiento a los 5 años.

A

$$= \begin{pmatrix} 0.982 & 0.176 & 0.092 & -6.116 & 0.002 & -2.210 & -0.411 & -0.918 & 0.0684 & 0.101 & -11.426 \\ 0.079 & 0.809 & -0.018 & 3.899 & -0.004 & 1.390 & 0.331 & -0.601 & -3.420 & 6.136 & 11.742 \\ -0.224 & -0.081 & 0.663 & 38.02 & 0.003 & -0.250 & 0.777 & 4.594 & 7.500 & -43.114 & 22.743 \\ 0.002 & 0.001 & 0.001 & 0.832 & 0.001 & 0.001 & 0.005 & -0.003 & -0.013 & -0.008 & 0.01 \\ 7.701 & 6.244 & 1.808 & 537.95 & 0.651 & -63.036 & -40.572 & 41.435 & -51.63 & 201.84 & -1373 \\ -0.09 & -0.005 & 0.001 & 1.235 & -0.001 & 0.694 & 0.021 & 0.038 & 0.036 & 0.876 & -1.157 \\ -0.009 & 0.001 & -0.005 & -2.365 & 0.001 & -0.195 & 0.720 & -0.488 & 0.320 & 0.746 & 0.776 \\ -0.005 & -0.001 & -0.001 & 1.329 & 0.001 & -0.101 & -0.020 & 0.829 & -0.017 & -0.156 & -0.097 \\ 0.007 & 0.004 & 0.001 & -0.867 & -0.001 & 0.107 & -0.018 & -0.051 & 0.829 & 0.144 & 0.261 \\ 0.002 & 0.002 & 0.001 & 0.084 & -0.001 & 0.001 & 0.002 & -0.010 & -0.006 & 0.722 & 0.106 \\ -0.001 & -0.001 & -0.001 & 0.049 & 0.001 & -0.011 & -0.001 & 0.001 & 0.001 & -0.009 & 0.997 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 10.395 \\ -4.720 \\ 4.182 \end{pmatrix}$$

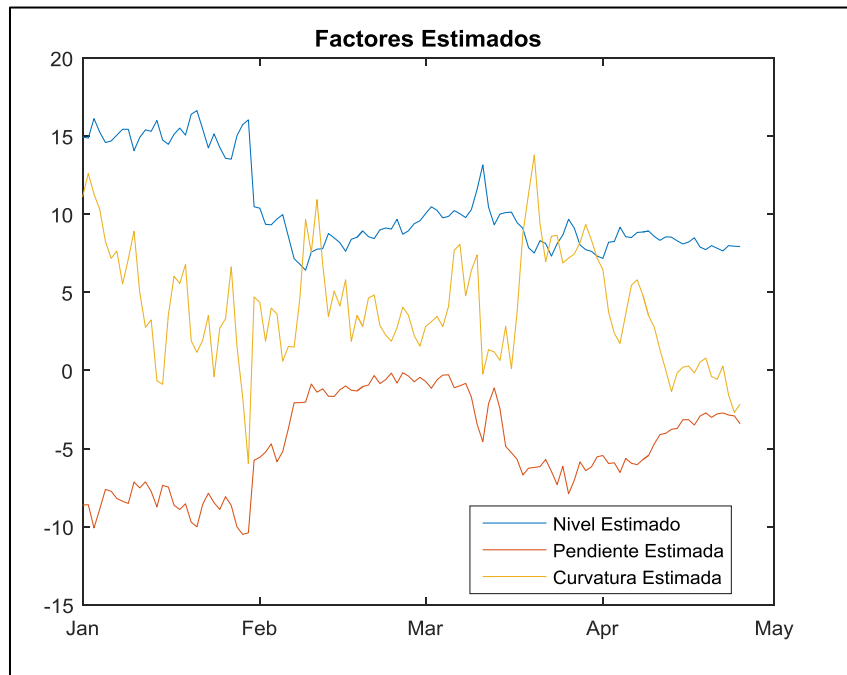
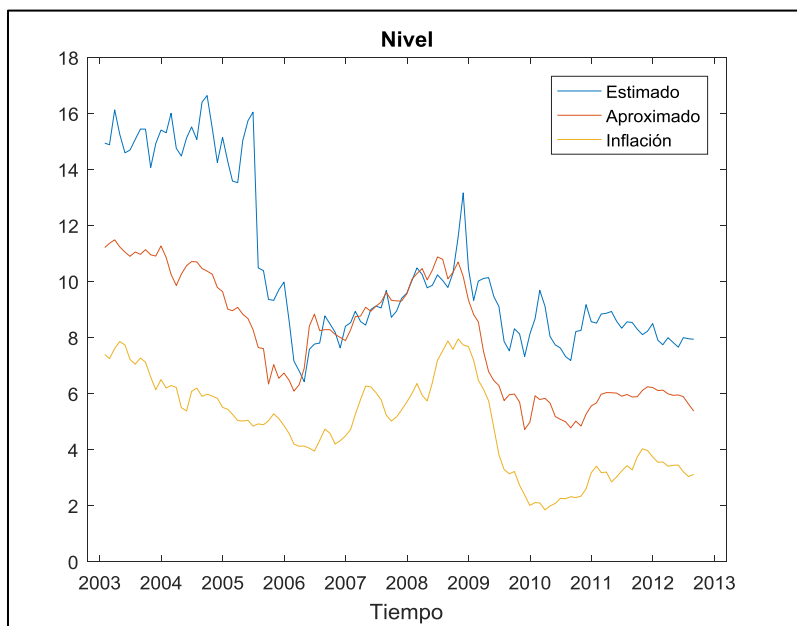
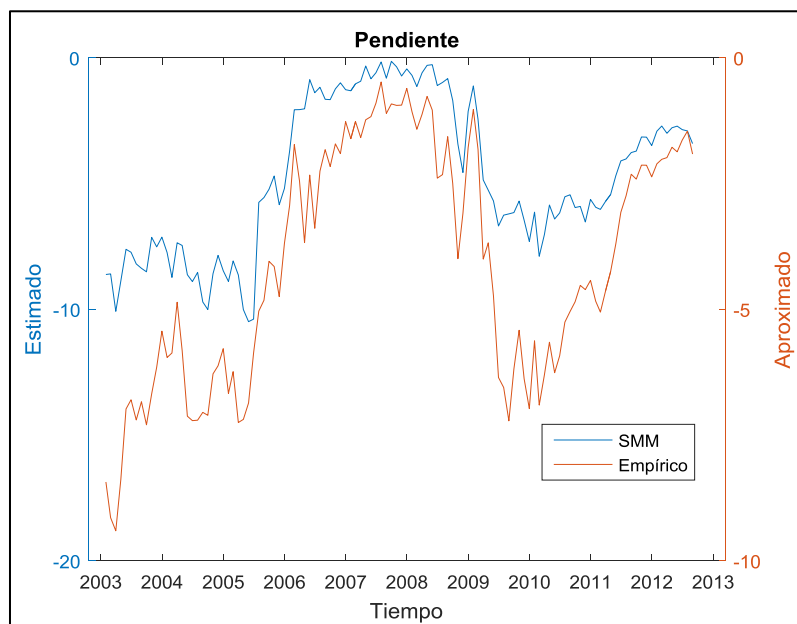


Fig. 13 Factores estimados

El modelo que incluye todos los macrofactores, al igual que el anterior, refleja un comportamiento dinámico de los factores latentes (nivel, pendiente y curvatura).

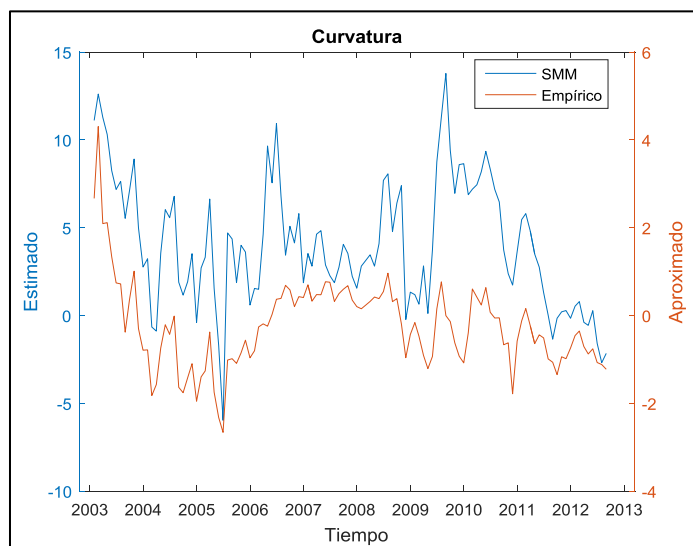


**Fig. 14 Nivel estimado vs. Nivel empírico e Inflación**

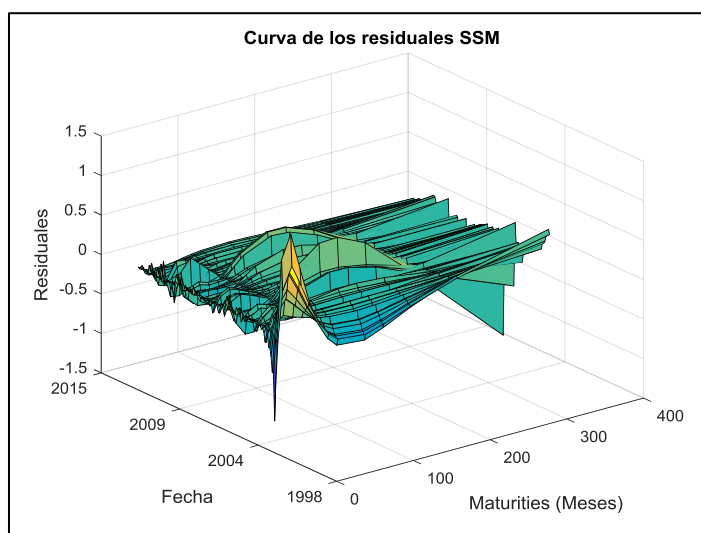


**Fig. 15 Pendiente estimada vs. Pendiente empírica**

El comportamiento logra ser modelado con un muy buen ajuste de acuerdo con las gráficas de las Fig. 14, Fig. 15 y Fig. 16, las cuales muestran la aproximación empírica de los factores junto con las estimaciones de las mismas. Dichas gráficas evidencian que la dinámica se captura en una gran medida. Con respecto a la Fig. 14 es interesante identificar que el nivel va en la misma tendencia en que lo hace la inflación, validando una de las comparaciones mencionadas en la teoría.



**Fig. 16 Curvatura estimada vs. Curvatura empírica**



**Fig. 17 Residuales del modelo con macrofactores**

Los residuales de este modelo son bien comportados (Fig. 17), ya que gráfica y formalmente pasan las pruebas de estacionariedad, asegurando que el modelo logra capturar completamente la dinámica del sistema. Además de ser errores no autocorrelacionados.

Tabla 4. Resumen estadístico de los errores

<b>Plazo (meses)</b>	<b>Errores</b>		<b>EAM pbs</b>	<b>RMSE pbs</b>
	<b>Media</b>	<b>Desv. Estándar</b>		
3	-0.39	16.58	8.89	1.65
6	0.02	2.67	1.74	0.27
12	0.61	13.30	6.99	1.33
24	2.73	20.45	11.75	2.05
36	-0.12	14.84	9.49	1.48
48	-0.54	7.31	4.98	0.73
60	-0.46	0.97	0.69	0.11
72	0.02	5.66	3.69	0.56
84	0.72	9.79	6.63	0.98
120	2.65	14.66	10.02	1.48
144	3.12	13.57	9.14	1.39
180	2.54	8.58	5.56	0.89
240	-0.44	3.22	2.22	0.32
360	7.22	23.80	14.75	2.49

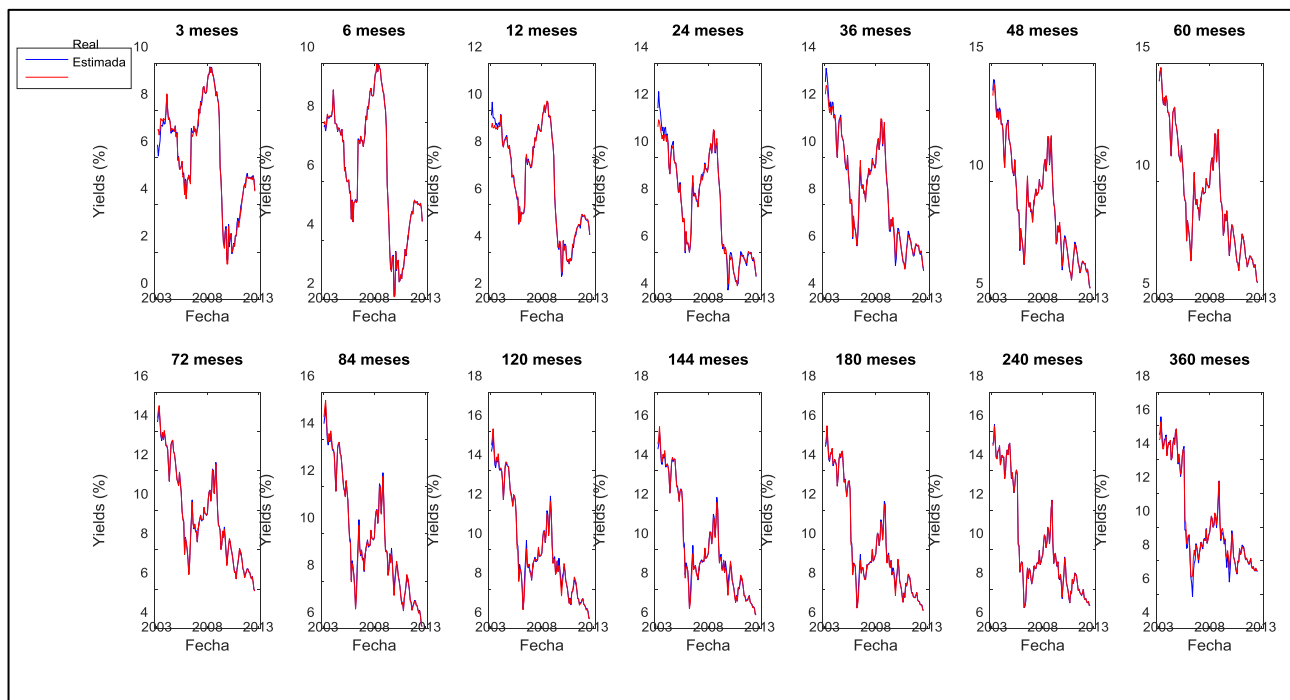
Estadística descriptiva de los errores del modelo con macrofactores estimado, medidos en puntos básicos (pbs). EAM: Error absoluto medio. RMSE: raíz cuadrada del error cuadrático medio

La Tabla 4 presenta la media y desviación de los errores expresados en puntos básicos para los diferentes plazos. Este modelo, contiene errores menores a los obtenidos en el modelo anterior; particularmente en los nodos de largo plazo.

En comparación con el EAM y el RMSE del modelo anterior, los errores son muy altos en el muy corto plazo; sin embargo disminuyen para los demás nodos. La reducción más

significativa está en el nodo de 360 meses para el que el RMSE pasa de 5.02 pbs a 2.49 pbs al ser estimado con macrofactores.

La gráfica entre la estimación y los valores observados de las tasas, muestra al buen ajuste que se tiene y una marcada diferencia en el nodo de más largo plazo en comparación con los resultados obtenidos con el modelo anterior (el cual es el que contiene mayor error).



**Fig. 18 Tasas estimadas vs. Tasas observadas**

En general, para los momentos en que se presentaron cambios bruscos de los factores, se pierde un poco de ajuste en la parte de más largo plazo.

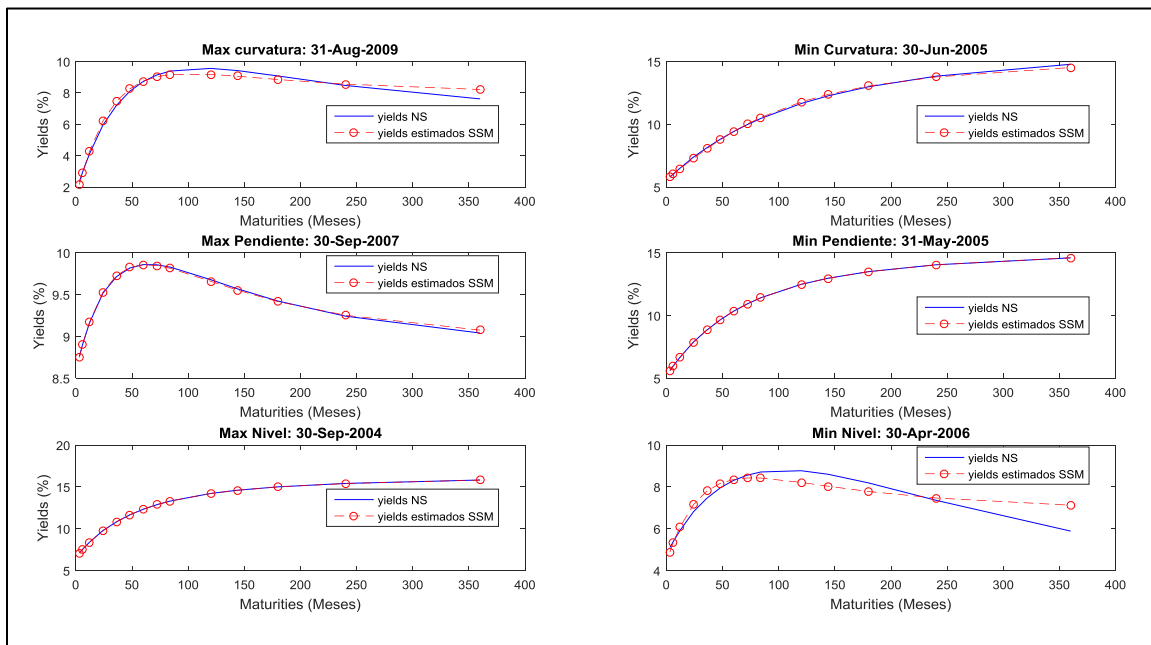
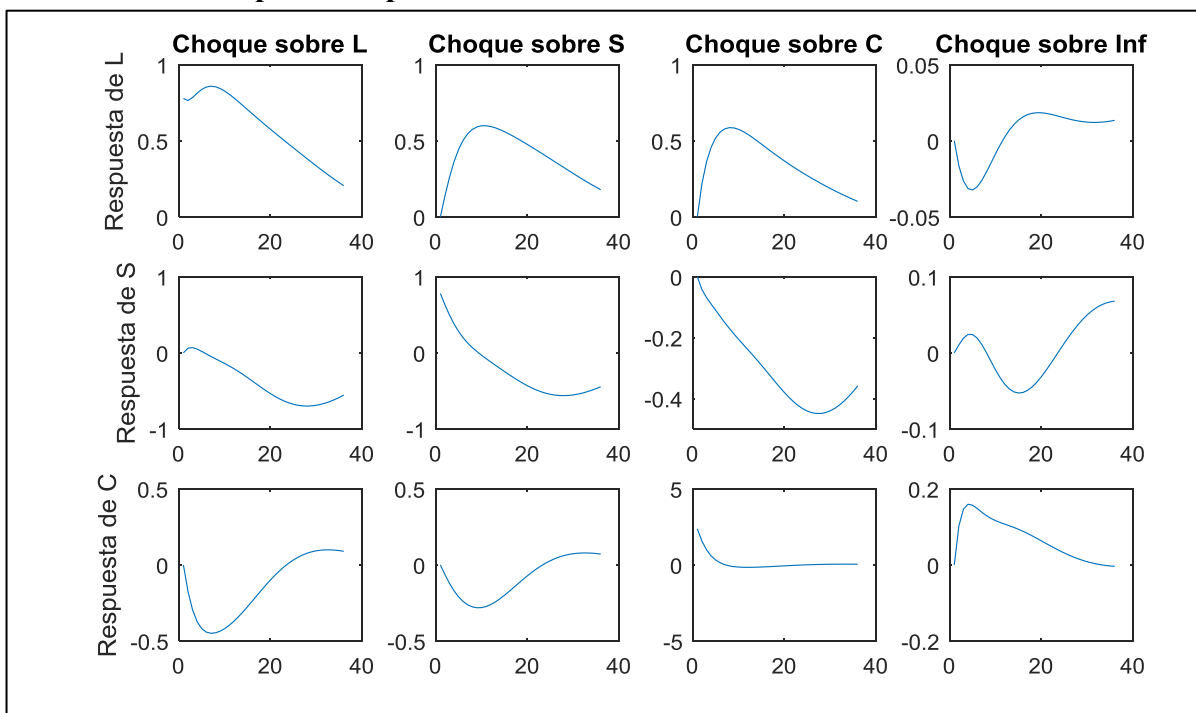


Fig. 19 Curva estimada vs. Curva observada (NS) en puntos mínimos y máximos de los factores

## Análisis Impulso Respuesta



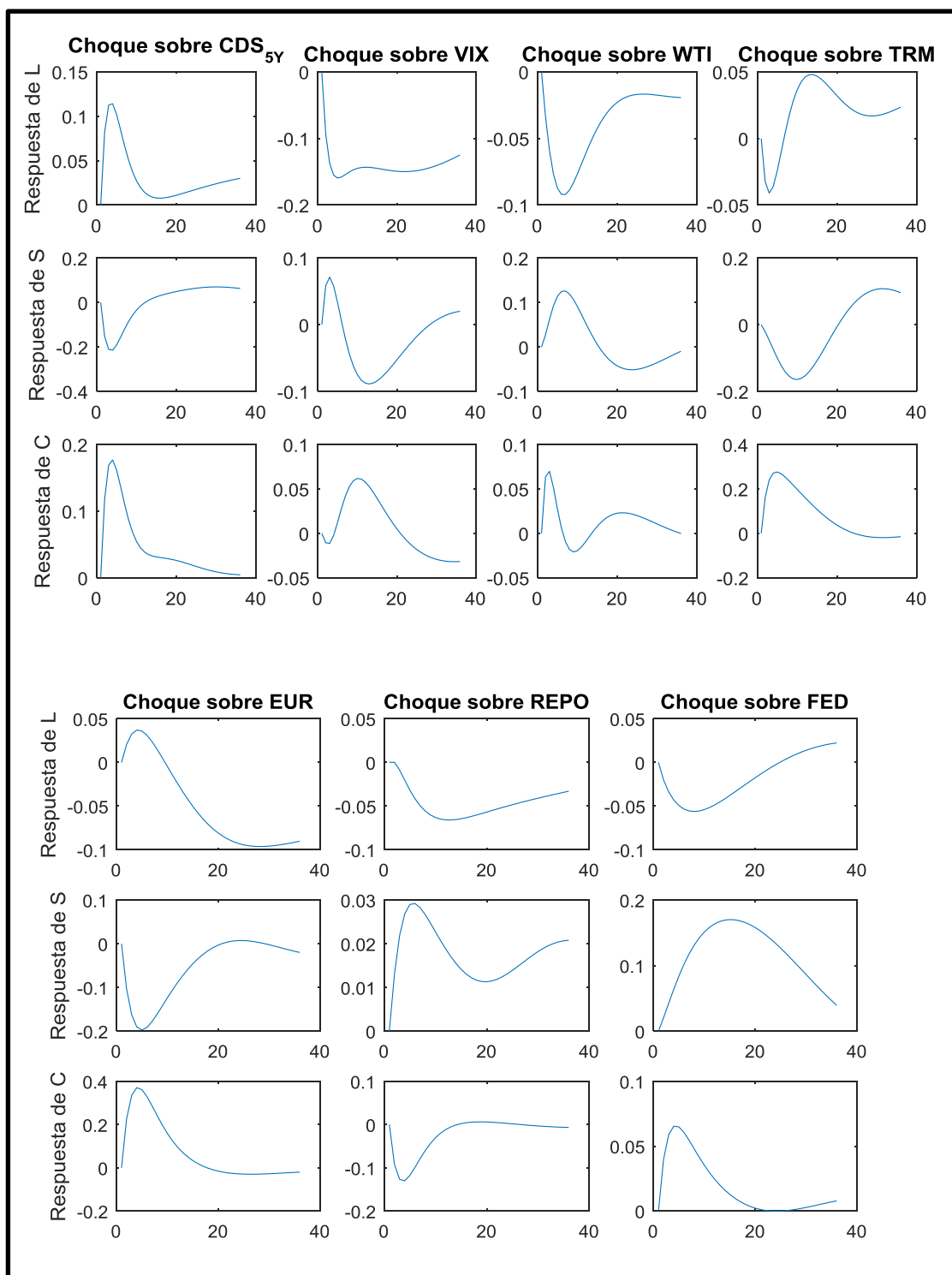


Fig. 20 Análisis Impulso Respuesta del modelo con macrofactores



Los resultados del análisis impulso respuesta, muestran que aumentos del nivel generan subidas en el corto plazo de esta variable y en una menor proporción, respuestas positivas de la pendiente y negativas sobre la curvatura. Por su parte, choques positivos sobre la pendiente generan aumento en el nivel de la curva pero disminución en la pendiente de los periodos siguientes (esto puede ser una evidencia de que la curva aunque tiene una pendiente positiva, no se mantiene con pendientes muy pronunciadas) y una caída significativa de la curvatura. Finalmente, un choque positivo sobre el factor de la curvatura muestra incrementos del nivel, pero reacciones negativas en los demás factores. Con respecto a los macrofactores, choques positivos en la inflación generan disminuciones en el nivel en el corto plazo pero una recuperación a partir del quinto mes; sin embargo, el efecto en los demás factores es contrario. Aumentos en los niveles de los CDS de 5Y causan subidas importantes en el nivel y la curvatura y decaimientos sobre la pendiente; mientras que aumentos en el índice VIX, el WTI y la TRM hacen que el nivel caiga en el corto plazo, la pendiente reaccione positivamente para los dos primeros casos y la curvatura aumente.

Finalmente, aumentos en la tasa de cambio euro/dólar causan aumentos en el primer y tercer factor y una caída en la pendiente; choques positivos en la tasa REPO muestra incrementos importantes en la pendiente (subida en las tasas de largo plazo) y pérdida de curvatura mientras que los choques positivos en la tasa de la FED tienen un efecto de aumento en la curvatura de la curva local y disminución en el nivel de la misma.

### **Descomposición de Varianza**

La descomposición de varianza, se realiza con el objetivo de identificar los factores y macrofactores que tienen mayor incidencia sobre el comportamiento de las tasas y de esta manera determinar las interacciones entre estos. La Tabla 5 proporciona la información de la descomposición de varianza para las tasas a 3, 12, 60 y 120 meses en horizontes de pronóstico de 1, 12 y 60 periodos. Para la tasa de 3 meses, el factor que tiene mayor incidencia sobre la variación de esta tasa es el correspondiente a la medida del nivel, aunque en el tiempo esta proporción disminuye, trasladándose a las variables macroeconómicas, principalmente el VIX y las tasas de cambio dólar/peso y euro/dólar y la

tasa de la FED; para el caso de la tasa de 12 meses se tiene que la variación depende en gran medida de la curvatura en el muy corto plazo, seguido por la pendiente; no obstante a medida que aumenta el periodo de pronóstico las variables macroeconómicas y de mercado comienzan a cobrar relevancia; agregar estas variables al modelo, en el tiempo, le quita incidencia a los factores latentes.

Para la tasa de 60 meses la curvatura comienza siendo la variable que afecta en mayor proporción los movimientos de esta tasa, pero en el tiempo esta relación se atenúa y se traslada al nivel y a macrofactores como el VIX, las tasas de cambio y los CDS de 5Y principalmente.

Finalmente, para la tasa de 10 años, en el muy corto plazo, la curvatura es la variable que tiene mayor proporción en la explicación de los movimientos de esta tasa; sin embargo, en el tiempo el nivel cobra relevancia seguido por los macrofactores.

Tabla 5. Descomposición de varianza para el modelo de macrofactores

Horizonte (meses)	Tasa de 3 meses			Tasa de 12 meses			Tasa de 60 meses			Tasa de 120 meses		
	1	12	60	1	12	60	1	12	60	1	12	60
<b>L</b>	37.5%	46.2%	41.9%	25.5%	42.4%	39.4%	26.5%	43.7%	41.3%	43.7%	50.2%	46.6%
<b>S</b>	34.4%	33.5%	29.2%	18.1%	28.3%	26.1%	5.7%	21.2%	22.1%	3.2%	20.4%	22.9%
<b>C</b>	28.1%	14.6%	15.0%	56.4%	23.3%	21.0%	67.8%	30.3%	25.9%	53.1%	25.7%	22.2%
<b>Inflación</b>	0.0%	0.1%	0.7%	0.0%	0.3%	0.7%	0.0%	0.3%	0.5%	0.0%	0.2%	0.3%
<b>CDS 5Y</b>	0.0%	0.3%	1.1%	0.0%	0.3%	1.0%	0.0%	0.3%	0.7%	0.0%	0.2%	0.5%
<b>VIX</b>	0.0%	2.0%	5.0%	0.0%	1.8%	4.8%	0.0%	1.6%	4.6%	0.0%	1.6%	4.2%
<b>WTI</b>	0.0%	0.0%	0.3%	0.0%	0.0%	0.3%	0.0%	0.1%	0.2%	0.0%	0.2%	0.3%
<b>TRM</b>	0.0%	1.2%	2.0%	0.0%	1.4%	2.1%	0.0%	1.0%	1.3%	0.0%	0.5%	0.7%
<b>EUR/USD</b>	0.0%	1.6%	2.9%	0.0%	1.9%	3.2%	0.0%	1.3%	2.7%	0.0%	0.6%	1.9%
<b>Tasa Repo</b>	0.0%	0.1%	0.2%	0.0%	0.2%	0.3%	0.0%	0.2%	0.4%	0.0%	0.2%	0.4%
<b>Tasa FED</b>	0.0%	0.3%	1.6%	0.0%	0.2%	1.2%	0.0%	0.1%	0.4%	0.0%	0.1%	0.2%

Descomposición de la varianza del modelo de macrofactores, medido con las variables (L: Nivel, S: Pendiente, C: Curvatura, Inflación Colombia, CDS 5Y, VIX: Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index, WTI: Precio del petróleo, TRM: Tasa representativa del mercado, EUR/USD: Tasa de cambio euro dólar, Tasa Repo y Tasa FED).

Es interesante notar que la inflación tiene mayor impacto sobre las tasas de corto plazos que sobre aquellas ubicadas en el tramo largo de la curva; esta relación es de esperarse pues es una variable que afecta directamente el tramo corto pues va atada a la tasa de intervención del Banco de la República. Lo mismo ocurre con los CDS de 5Y, que miden el riesgo país, la relación hallada se puede sustentar en que estos están mostrando una perspectiva del riesgo de los papeles soberanos en las condiciones actuales, razón por la cual los papeles que tendrían mayor volatilidad serían aquellos correspondientes al corto plazo.

### Back testing

Tabla 6. Errores en el Back Testing

Plazo (meses)	Modelo solo yield			Modelo Macrofactores		
	EAM	CSPE	RMSE	EAM	CSPE	RMSE
3	28.2	16030.4	37.4	19.1	84300.8	22.0
6	25.5	22065.5	36.4	15.0	28507.4	19.2
12	25.5	8467.7	37.4	15.9	92109.0	20.5
24	32.8	69760.8	43.6	22.4	89601.2	27.2
36	38.1	36028.4	49.3	26.6	76209.0	32.4
48	41.3	155750.1	54.0	28.2	160783.8	35.7
60	43.3	179199.7	57.3	29.8	157521.3	37.7
72	44.3	200338.5	59.6	31.1	167758.3	38.9
84	45.4	141669.5	61.3	32.0	244709.3	39.6
120	50.1	240601.4	64.9	32.6	298552.7	39.7
144	53.3	169189.0	67.3	31.8	382356.7	39.0
180	58.7	355210.7	71.7	30.9	338501.3	38.4
240	66.7	300334.0	80.4	29.9	609823.2	39.7
360	80.7	733083.5	96.8	40.5	471321.8	49.1

Errores de los pronósticos de los modelos en la etapa de back testing (EAM: Error absoluto medio, CSPE y RMSE: Raíz cuadrada del error cuadrático medio)

Se realizó un back testing con el 25% de muestra restante, utilizando una ventana móvil de 1 día. La Tabla 6 presenta los resultados, en los que se puede encontrar un RMSE y EAM

significativamente inferior al incluir los macrofactores, dando evidencia de la mejora al adicionarlos en el modelo. Por su parte, el indicador CSPE muestra que cualquiera de los dos modelos puede ser una mejor aproximación que un modelo de caminata aleatoria.

Para el modelo de solo tasas, se graficaron (Ver Anexos) las estimaciones de las tasas de los diferentes nodos (3 meses, 6 meses, 12 meses, 24 meses, 38 meses, 48 meses, 72 meses, 84 meses, 120 meses, 144 meses, 180 meses, 240 meses y 360 meses), junto con los valores reales con el objetivo de identificar las diferencias que podrían presentarse. En términos generales la tendencia logra ser capturada en gran medida; sin embargo existe un punto en el que la estimación de la tasa para todos los nodos fue significativamente baja en comparación con el valor real.

Para el modelo de macrofactores, se graficaron (Ver Anexos) las estimaciones de las tasas de los diferentes nodos (3 meses, 6 meses, 12 meses, 24 meses, 38 meses, 48 meses, 72 meses, 84 meses, 120 meses, 144 meses, 180 meses, 240 meses y 360 meses), junto con los valores reales con el objetivo de identificar las diferencias que podrían presentarse. En comparación con los resultados previos, estas aproximaciones son mucho mejores y en este caso no se tiene una estimación significativamente por encima/debajo del valor real.

## CRONOGRAMA

[illegible]

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se presenta una propuesta de estimación, a través de un Filtro de Kalman implementado en MATLAB, del modelo de Diebold & Li con factores latentes y el modelo Diebold, Rudebusch & Aruoba con macrofactores, con el fin de estimar la estructura a plazo de tasas del mercado de TES, buscando obtener una aproximación innovadora en cuanto a la forma de estimar dicha curva (no solo utilizando la información histórica sino también a través de las relaciones que tiene con variables financieras y macroeconómicas). Como se mencionó, existen pocos estudios que realizan esta estimación sobre la información local, lo que dificultó poder realizar comparaciones en cuanto a los errores obtenidos.

Utilizando información mensual de la estructura a plazos de tasas de interés de Colombia se estimó el modelo de Diebold & Li con factores latentes, los resultados arrojaron las estimaciones para los factores a través de los cuales pueden ser calculadas las tasas cero cupón las cuales se comparan con las calculadas a través del modelo de Nelson & Siegel. Los errores (medido con el RMSE) obtenidos en el ajuste, además de ser bien comportados son muy bajos (5 pbs para el nodo de más largo plazo). Posteriormente, se estima el modelo de Diebold, Rudebusch & Aruoba, agregando macrofactores (inflación local 12 meses, CDS 5Y, índice VIX, precios del WTI, TRM, tasa de cambio Euro/Dólar, tasa REPO y tasa FED), al igual que el anterior, se obtienen las tasas cero cupón y se comparan con las obtenidas a través de la metodología de NS, estos errores son estacionarios (bien comportados) y no autocorrelacionados, presentan errores de 2.49 pbs para el nodo de más largo plazo.

Ambos modelos pasan por una etapa de back testing, en la cual se mide qué tan buenos son para pronosticar; este paso se realizó con una porción de los datos, obteniendo errores menores por parte del modelo con macrofactores en comparación con el modelo de factores latentes, aunque en una magnitud superior a la obtenida con la muestra *in sample* (49 pbs para el nodo de más largo plazo). De esta manera se evidencia que incluir macrofactores mejora la aproximación a la curva, lo que demuestra que estas variables tienen un efecto sobre los movimientos de la estructura a plazos.

Debido a que los errores más grandes se obtienen en la parte larga de la curva, se recomienda buscar variables que tengan mayor impacto sobre estos nodos e incluirlas en el modelo y de esta manera reducir los errores obtenidos.

Esta propuesta se puede tomar como una base para el desarrollo de modelos que incluyen marfactores y que buscan estimar la estructura a plazos de tasas de interés de Colombia, sería interesante poder identificar cuáles son aquellas variables que influyen en mayor medida sobre los diferentes tramos de la curva y así realizar una estimación más aproximada de la misma.

Adicionalmente, incluir variables de países latinoamericanos, Europa y Asia puede ser interesante para medir la relación entre las diferentes economías, y capturar la relación global de las economías y mercados.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ang, A., Piazzesi, M., & Wei, M. (2006). What does the yield curve tell us about GDP growth? (Vol. 131, pp. 359 - 403).
- Ann, A., & Piazzesi, M. (2003). A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables (Vol. 50, pp. 745 - 787): *Journal of Monetary Economics*.
- Arango, L. E., & Flórez, L. A. (2008). Tramo corto de la curva de rendimientos, cambio de régimen inflacionario y expectativas de inflación en Colombia: Banco de la República de Colombia.
- Arango, L. E., González, A., León, J. J., & Melo, L. F. (2006). Cambios en la tasa de intervención y su efecto en la estructura a plazo de Colombia (pp. 1 - 31). Banco de la República de Colombia.
- Birz, G., & Lott Jr, J. R. (2011). The effect of macroeconomic news on stock returns: New evidence from newspaper coverage. *Journal of Banking & Finance*, 35(11), 2791-2800.
- Bolder, D. (2001). Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation: Bank of Canada, Working Paper.
- Brandt, M., & Chapman, D. Affine Term Structure Models.  
<https://faculty.fuqua.duke.edu/~mbrandt/papers/published/affine.pdf> Duke University: .
- Christensen, J., Diebold, F., & Rudebusch, G. (2009). An arbitrage-free generalized Nelson-Siegel term structure model (Vol. 12, pp. C33 - C64): *Econometrics Journal*.
- Dabla-Norris, E., & Srivisal, N. (2013). Revisiting the Link Between Finance and Macroeconomic Volatility. International Monetary Fund, IMF Working Papers: 13/29.
- Diebold, F., & Li, C. (2005). Forecasting the term structure of government bond yields (Vol. 130, pp. 337 - 364): *Journal of Econometrics*.
- Diebold, F., Piazzesi, M., & Rudebusch, G. (2005). Modeling bond yields in finance and macroeconomics (Vol. 95, pp. 415 - 420): *The American Economic Review*.



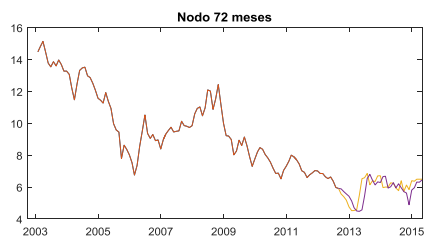
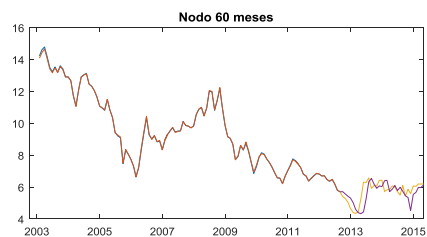
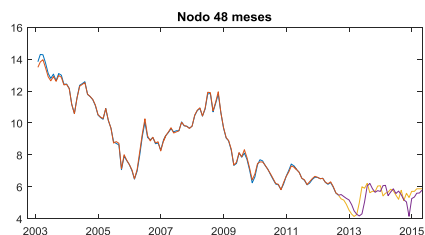
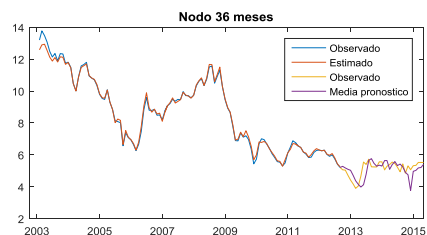
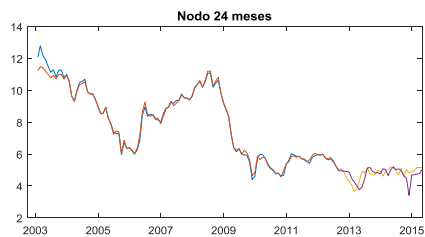
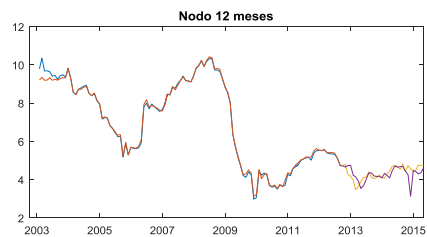
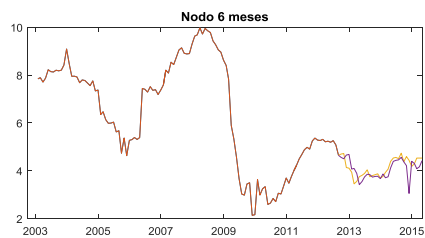
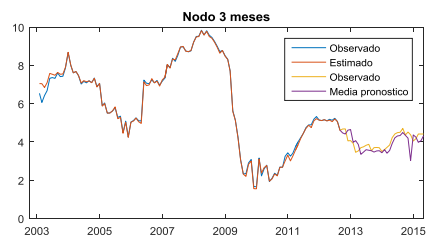
- Diebold, F., Rudebusch, G., & Aruoba, B. (2006). The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach (Vol. 131, pp. 309 - 338): *Journal of Econometrics*.
- Dominguez, K. M. E. (2006). When do central bank interventions influence intra-daily and longer-term exchange rate movements? *Journal of International Money and Finance*, 25(7), 1051-1071.
- Duffie, D., & Kan, R. (1996). A yield factor model of interest rates (Vol. 6, pp. 379 - 406): *Mathematical Finance*.
- Fратиanni, M., & Marchionne, F. (2013). The Fading Stock Market Response to Announcements of Bank Bailouts. *Journal of Financial Stability*, 9(1), 69-89.
- Fujii, K. Extended Kalman Filter (pp. 3 - 55): The ACFA - Sim - J Group.
- Glick, R., & Leduc, S. (2012). Central bank announcements of asset purchases and the impact on global financial and commodity markets. *Journal of International Money and Finance*, 31(8), 2078-2101.
- Harvey, A. (1989). Forecasting structural time series models and the Kalman Filter (pp. 100 - 169): Cambridge University Press.
- Hwang, J.-K. (2014). Spillover Effects of the 2008 Financial Crisis in Latin America Stock Markets. *International Advances in Economic Research*, 20(3), 311-324.
- Ikoku, A. E., & Okany, C. T. (2014). Did the Economic and Financial Crises Affect Stock Market Sensitivity to Macroeconomic Risk Factors? Evidence from Nigeria and South Africa. *International Journal of Business*, 19(3), 275-290.
- Izquierdo, S., Cesáreo, H., & Pajares, J. (2004). El espacio de estados en la econometría. VIII Congreso de Ingeniería de la Organización.
- Kleeman, L. Understanding and Applying Kalman Filtering: Monash University.
- Lemke, W. (2008). An affine macro-finance term structure model for the euro area (Vol. 19, pp. 41 - 69): *North American Journal of Economics and Finance*.
- Lildholdt, P., Panigirtzoglou, N., & Peacock, C. (2007). An affine macro-factor model of the UK yield curve: Bank of England, Working paper.
- Maybeck, P. (1979). Stochastic Models, Estimation and Control (Vol. 141, pp. 1 - 23): *Mathematics in Science and Engineering*.

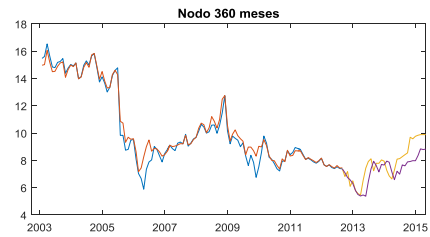
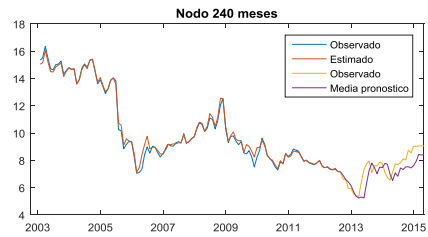
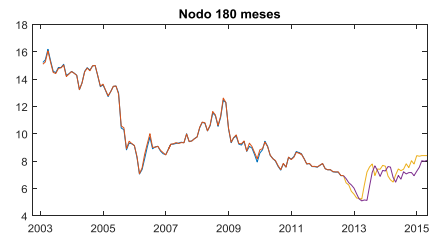
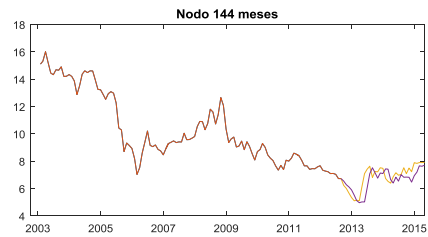
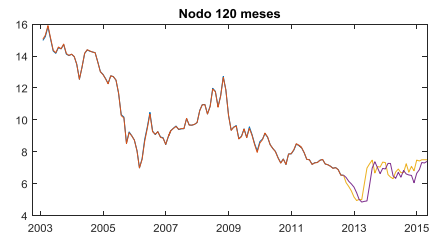
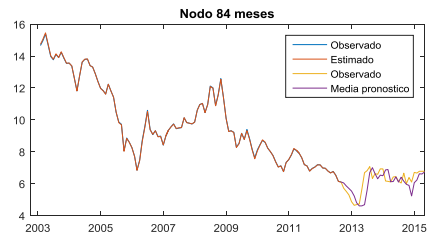
- Mejia, D. (2003). La estructura a plazo de las tasas de interés y su capacidad de predicción de distintas variables económicas: Reportes del Emisor.
- Melo, L. F. (2010). Relación entre las variables macro y la curva de rendimientos. In G. A. Castro (Ed.), (pp. 1 - 28). Colombia: Borradores de Economía.
- Mirkin, Y., Kuznetsova, O., & Kuznetsov, A. (2013). The Financial Depth of Emerging Markets: The Case of Russia. *Competition and Change*, 17(2), 156-175.
- Moser, C., & Dreher, A. (2010). Do Markets Care about Central Bank Governor Changes? Evidence from Emerging Markets. *Journal of Money, Credit, and Banking*, 42(8), 1589-1612.
- Nguyen, T., & Ngo, C. (2014). Impacts of the US Macroeconomic News on Asian Stock Markets. *Journal of Risk Finance*, 15(2), 149-179.
- Quadrini, V. (2014). Macroeconomic Effects of Asset-Price Shocks in a Globalized Financial Market. *Scandinavian Journal of Economics*, 116(1), 190-217.
- Rosa, C. (2011). Talking Less and Moving the Market More: Evidence from the ECB and the Fed. *Scottish Journal of Political Economy*, 58(1), 51-81.
- Rudebusch, G., & Wu, T. (2004). A macro-finance model of the term structure, monetary policy and the economy, Working Paper: Federal Reserve Bank of San Francisco, Working paper series.
- Siklos, P. (1997). The Effect of Canadian and U.S. M1 Announcements on Canadian Financial Markets: The Crow Years. Retrieved from
- Simon, D. (2001). Kalman Filtering (pp. 72 - 79): Embedded Systems Programming.
- Vela, D. (2013). Forecasting Latin-American yield curves: An artificial neural network approach. Colombia: Borradores de Economía.
- Velásquez, M. (2015). Affine term structure models: forecasting the Colombian yield curve. Universidad Eafit Estado: Tesis concluida Ingeniería Matemática.
- Vithessonthi, C., & Techarongrojwong, Y. (2013). Do Monetary Policy Announcements Affect Stock Prices in Emerging Market Countries? The Case of Thailand. *Journal of Multinational Financial Management*, 23(5), 446-469.
- Vélez, C. (2009). Filtro de Kalman, Material de curso Modelación Experimental: Universidad EAFIT.

Wang, S., & Mayes, D. G. (2012). Monetary policy announcements and stock reactions: An international comparison. *North American Journal of Economics & Finance*, 23(2), 145-164. doi:10.1016/j.najef.2012.02.002

## ANEXOS

### Tasas estimadas con el modelo de factores latentes





## Tasas estimadas con el modelo de macrofactores

